Pensar en matemáticas

Rocío Abascal Mena y Erick López Ornelas

Obra ganadora del Segundo Concurso para la publicación de libros de texto y materiales de apoyo a la impartición de los programas de estudio de las licenciaturas que ofrece la Unidad Cuajimalpa

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

Pensar en matemáticas

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

1) Pensar en matemáticas
Clasificación Dewey: 510.1 A23
Clasificación LC: QA9 A23
Abascal Mena, Rocío
Pensar en matemáticas / Rocío Abascal Mena, Erick López Ornelas ; corrección de estilo y cuidado editorial Hugo A. Espinoza Rubio. -- México : UAM, Unidad Cuajimalpa, c2016.
144 p. : il. col., diagrs. ; cm.
ISBN: 978-607-28-0821-8
1. Lógica matemática – Problemas, ejercicios, etc. 2. Razonamiento -- Soluciones numéricas. 3. Matemáticas – Soluciones numéricas. 3. Matemáticas – Problemas, ejercicios, etc.
I. López Ornelas, Erick, coaut. II. Espinoza Rubio, Hugo A., colab.

Esta obra fue dictaminada positivamente por pares académicos mediante el sistema doble ciego y evaluada para su publicación por el Consejo Editorial de la UAM Unidad Cuajimalpa.

Avenida Vasco de Quiroga 4871
Col. Santa Fe Cuajimalpa, delegación Cuajimalpa de Morelos
C.P. 05348, Ciudad de México (Tel.: 5814 6500)
www.cua.uam.mx

ISBN: 978-607-28-0821-8

Primera edición: 2016

Corrección de estilo: Hugo A. Espinoza Rubio
Diseño editorial y portada: Ricardo López Gómez

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

Rocío Abascal Mena y Erick López Ornelas

Pensar en matemáticas

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Cuajimalpa

Índice

Agradecimientos

Este libro no hubiera sido posible de realizar sin el interés, el ánimo y la motivación de los alumnos de los grupos TD02T y TD03D, correspondientes a la Unidad de Enseñanza-Aprendizaje (UEA) de Introducción al Pensamiento Matemático, impartido durante el trimestre de Otoño 15, en la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Cuajimalpa (UAM-C). El presente material es el fruto de un trabajo en equipo, tanto de alumnos como de profesores, todos comprometidos con mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Agradecemos el interés del Dr. Eduardo Peñalosa Castro por impulsar ideas novedosas, en aras de fomentar la docencia en nuestra universidad.

Introducción

Los avances científicos, humanísticos y tecnológicos requieren que los universitarios no sólo aprendan los conocimientos propios de su disciplina, sino que desarrollen capacidades genéricas de comunicación y pensamiento para dar soluciones a problemas que plantean las sociedades contemporáneas. De manera específica, el Plan de Desarrollo Institucional 2012-2024 de la UAM establece la necesidad de que los alumnos utilicen lenguajes formales y apliquen sus conocimientos en la solución de problemas.

El manejo de las matemáticas como lenguaje formal genérico se refiere a la habilidad del alumno para abstraer, validar e inferir de manera lógica, habilidades indispensables del pensamiento racional que permiten conducir a explicar una realidad o dar solución a un problema.

La UAM-C planteó desde sus inicios, en 2005, como tronco general de formación inicial las Unidades de Enseñanza Aprendizaje (UEA): Introducción al Pensamiento Matemático, Taller de Lenguaje y Argumentación y Seminario de Sustentabilidad y Cultura Ambiental. Las capacidades genéricas que constituyen cada una de estas UEA son transversales respecto de los planes y programas de estudio; no son restrictivas ni excluyentes de ninguna forma de trabajo académico establecido, son necesarias para todas las profesiones.

La UEA *Introducción al Pensamiento Matemático* que se imparte en todas las licenciaturas de la sede Cuajimalpa es un primer acercamiento a la estimulación de capacidades básicas como la observación, la reflexión, la identificación —entre otras— y para expresar, mediante el lenguaje, las nociones que el alumno va a adquiriendo a través de sus propias palabras.

Con la finalidad de que este libro contribuya (en lo que le corresponda) con los objetivos planteados en la UEA de *Introducción al Pensamiento Matemático*, es indispensable plantear un ambiente adecuado en el que el análisis, el estudio, la reflexión y la discusión prevalezcan entre el alumnado. Para ello, este libro está organizado en tres capítulos y unos apéndices (divididos en cuatro): "Problemas, problemas y más problemas", "Introducción a la teoría de conjuntos", "Introducción a la lógica" y los apéndices "Materiales de apoyo —elaborados por los alumnos—", "Solución de los ejercicios", "Glosario" e "Índice alfabético", así como un apartado final de "Fuentes".

En todos los temas se incluyen situaciones diversas en las que los alumnos se enfrentan al planteamiento y resolución de problemas de distinto tipo. El propósito de estas situaciones es movilizar los conocimientos matemáticos previos de los alumnos, para generar y conocer procedimientos y razonamientos distintos con el fin de llegar a una solución.

En la UEA de *Introducción al Pensamiento Matemático* se busca que los alumnos conozcan las pautas del pensamiento vinculadas con nociones matemáticas y comprendan la importancia de las matemáticas como punto de partida y de enriquecimiento en cualquier elaboración de nuevos conocimientos, independientemente de la disciplina.

Este libro está destinado al alumno, para que, a partir de las explicaciones claras de otros compañeros, pueda profundizar en algunos temas propios de la UEA *Introducción al Pensamiento Matemático*. El cuestionamiento y la explicación de los procesos realizados es parte fundamental para el entendimiento, seguimiento y apropiación del conocimiento. Por lo tanto, se sugiere que todos los ejercicios sean explicados entre pares con el fin de favorecer el aprendizaje y la evaluación.

Finalmente, *Pensar en matemáticas* es un libro complementario para la UEA Introducción al Pensamiento Matemático, mas no intenta ser el libro de base para la impartición de esa asignatura.

La UEA Introducción al Pensamiento Matemático

La UEA *Introducción al Pensamiento Matemático* (400005) se imparte en grupos interdisciplinarios, respondiendo a las necesidades de introducir al alumno a problemas reales, desde perspectivas y disciplinas diferentes. Uno de los objetivos de dicha asignatura es que al final del curso *el alumno sea capaz utilizar el método deductivo* en la solución de problemas sencillos. Con este objetivo en mente, el curso está diseñado para que el alumno los resuelva desde el primer día de clase, a partir de la descomposición de estos en otros más pequeños. De igual manera, el contenido sintético incluye:

1. *Introducción al planteamiento matemático de problemas a través de ejemplos.* En el primer capítulo se estudian tres diferentes formas de razonamiento que todos tenemos y debemos saber aplicar: inductivo, deductivo y abstracto; además, se muestra un conjunto de estrategias para abordar y resolver problemas matemáticos simples. En el segundo capítulo se estudia la teoría de conjuntos para determinar las relaciones existentes entre un todo y las partes que lo componen. Estos conjuntos nos ayudan a simplificar definiciones y elementos difíciles de abordar desde otras ramas de las matemáticas. El primer y segundo capítulo ayudan a plantear y entender problemas de una

mejor manera, mediante un conjunto de ejemplos y experiencias diversas de otros estudiantes.

2. *Lógica y argumentación. Introducción al método deductivo basándose en ejemplos.* La lógica matemática es una rama fundamental de las matemáticas que establece el valor de verdad de las proposiciones y permite construir el razonamiento matemático. En el curso Introducción al Pensamiento Matemático se utilizan proposiciones simples y complejas que pueden tomar valores verdaderos o falsos. Las posibilidades de que una proposición sea verdadera se ordenan en lo que se llama tabla de verdad, la cual refleja gráficamente las posibilidades de obtener verdadero o falso. Los alumnos utilizan las tablas de verdad y el uso de la lógica matemática en el tercer capítulo.

El contenido del presente material está totalmente relacionado con la UEA Introducción al Pensamiento Matemático, ya que es el producto de haber impartido esa materia en el trimestre de Otoño de 2015. Se ha puesto especial atención en la práctica y en la aplicación de ejercicios muy variados, que aumentan de complejidad, para que el alumno conozca y aplique lo mostrado en clase.

Una de las principales características en la impartición de esta asignatura es la posibilidad de contar con material interactivo que se desarrolló en diferentes plataformas, el cual sirvió para incentivar la competencia, la acción, la propuesta y la iniciativa de los alumnos en el desarrollo de material de apoyo. El que aquí se presenta se basa en la experiencia recabada por los profesores que impartieron esta UEA con grupos interdisciplinarios, en los que participaron alumnos de las licenciaturas en Ciencias de la Comunicación, Diseño y Tecnologías y Sistemas de Información.

Debido a la gran cantidad de ejercicios y material que se generó en esta UEA, aquí sólo se cubren tres capítulos abriendo la posibilidad de mostrar el material restante en otra edición.

Conocimientos, habilidades y actitudes a adquirir y desarrollar

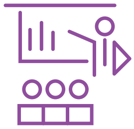
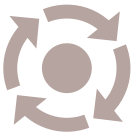
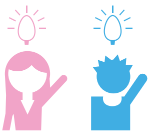
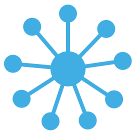
El pensamiento matemático es la capacidad de usar las matemáticas para resolver distintas situaciones cotidianas que involucran el dominio de un campo de conocimientos específico, como el de las habilidades de abstracción, validación empírica e inferencia lógica:

- *Abstracción:* le permite al alumno comprender la relación entre un concepto y un objeto en un campo de conocimiento determinado. De igual manera, permite elaborar modelos que ayudan en la búsqueda de formas de representación para fenómenos, problemas y relaciones. Estos modelos pueden ser validados empíricamente.

- *Validación empírica:* le permite al alumno comparar el modelo de representación con la realidad. Todos los modelos son, por naturaleza, representaciones incompletas del sistema que intentan modelar, pero permiten establecer los límites, dentro de los que una proposición es susceptible de ser cierta y explicar la realidad y volverla comprensible. Es muy importante que en todo momento se realicen preguntas como las siguientes: ¿en qué condiciones funciona el modelo propuesto? ¿Se puede generalizar? ¿En qué casos no se cumple? ¿Cómo podemos validarlo? Las respuestas a estas preguntas deberían conducir a la deducción o inferencia de una solución o explicación al problema.
- *Inferencia lógica:* le permite al alumno obtener conclusiones válidas a partir de premisas básicas. Los alumnos contarán con elementos matemáticos bien definidos, por ejemplo, conceptos, relaciones entre conceptos, entre otros, para ser capaces de construir un pensamiento matemático en el que interviene lo crítico y lo analítico.
- *Pensamiento crítico:* le permite al alumno buscar características invariantes que se observan, como la capacidad de discernir, debatir, evaluar los hechos, buscar contradicciones, entre otras.
- *Pensamiento analítico:* le permite al alumno identificar variables que intervienen en la situación problema, de ahí que se incorpora un razonamiento lógico inductivo o deductivo que muestra, participa e interrelaciona el todo y las partes de un objeto estudiado.

Iconografía utilizada

En todo el libro se utiliza un conjunto de íconos que muestran cada una de las tareas a realizar:

	Objetivo
	Atención
	Ejemplo
	Ejercicios
	Solución paso a paso
	Los alumnos lo explican
	Respuestas y razonamiento de los alumnos
	Actividad integradora

Problemas, problemas y más problemas

Un problema es cuando se te presenta la oportunidad
de dar tu máximo esfuerzo.
DUKE ELLINGTON

Objetivo

Que el alumno sea capaz de identificar los tipos de razonamiento aplicados a las matemáticas y que explique algunas estrategias para resolver problemas.

La capacidad de los seres humanos para solucionar problemas es una actividad de gran importancia en la enseñanza; se caracteriza por ser una de las conductas más inteligentes de los seres humanos y la que mayor utilidad práctica tiene, pues en la vida cotidiana se presentan problemas de manera continua. Existen pruebas que desde la Antigüedad ha habido una necesidad de resolver problemas matemáticos, muestra de ello son los papiros de Rhind encontrados en el antiguo Egipto (2000 a.n.e.), los cuales constituyen una colección de 84 problemas de carácter aplicado. Más recientemente, George Pólya (matemático húngaro que vivió en el siglo XX) se dedicó a buscar respuestas a las dificultades de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos. Tales problemas significan para muchos un placer y para otros una tragedia; lo cierto es que el ser humano no siempre puede evadir enfrentarlos, por lo que es necesario desarrollar habilidades para resolverlos.

En este primer capítulo abordaremos inicialmente tres tipos de razonamiento (inductivo, deductivo y abstracto), que nos ayudarán a entender cómo es que intentamos resolver problemas de manera natural. Posteriormente, mostraremos algunas estrategias ya definidas para la resolución de problemas matemáticos.

El razonamiento inductivo

El razonamiento está estrechamente vinculado con la capacidad de observación que tenemos todos los seres humanos para establecer relaciones (simples o complejas) que permitan llegar a la comprensión de un problema y, por ende, a realizar una propuesta que solucione ese problema. Este razonamiento está ligado a la utilización de las experiencias propias y muy particulares que tenemos para llegar a una conclusión.

Existen dos tipos de razonamiento que nos ayudarán a obtener conclusiones a partir de problemas matemáticos: 1) el razonamiento inductivo y 2) el razonamiento deductivo.

Al observar que un método de trabajo funciona constantemente para cierto tipo de problemas, concluiremos entonces que el mismo método de trabajo funcionará para resolver problemas similares. Esta conclusión recibe el nombre de *conjetura*, la cual es una suposición fundamentada en observaciones repetidas en un patrón o proceso particular. Este razonamiento es el *inductivo*.

Razonamiento inductivo

Se caracteriza por permitir llegar a una conclusión general (mediante una conjetura), a partir de observaciones repetidas de ejemplos específicos. La conjetura puede ser verdadera o falsa.

El razonamiento inductivo consiste en analizar casos particulares, es decir, realizar experiencias sencillas, pero con las mismas características del problema original, para conseguir resultados que, al relacionarlos, nos permitan llegar a una conclusión. A esto lo llamaremos caso general.

Ejemplo

Nuestra casa está hecha de ladrillo. Tengo tres vecinos que tienen casas hechas de ladrillo. Por lo tanto, todas las casas de nuestra colonia están hechas de ladrillo.

Solución paso a paso

En el ejemplo anterior hay dos *premisas* a considerar: 1) conocer que nuestra casa está construida con ladrillo y 2) saber que tengo tres vecinos que tienen casas construidas con el mismo material. La *conclusión* es 3) todas las casas de la colonia están hechas de ladrillo.

Éste es un ejemplo en el que la conclusión puede ser verdadera o falsa. A partir de la información con la que contamos (las premisas) nos hace pensar que la conclusión sería verdadera. Sin embargo, basta con un solo *contraejemplo* para determinar que el resultado es falso. En resumen:

Caso Particular 1 Caso Particular 2 Caso Particular 3 Inducción → Caso Generalizado

Ejemplo

Encuentra el número que sigue en esta serie:
2, 9, 16, 23, 30, ☐

Solución paso a paso

En el ejemplo anterior hay dos premisas a considerar: 1) el elemento que sigue es un número entero y 2) existe un patrón en los números de ir aumentando en 7. La conclusión es entonces el número 37.

Al emplear el razonamiento inductivo, concluimos que el resultado siguiente era el 37. Pero esto es incorrecto. Y aunque el razonamiento inductivo que aplicamos es el correcto, en realidad, esta secuencia de número se refiere a unos días del calendario y, por lo tanto, el resultado correcto es el número 7.

Junio 2015

Domingo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

Julio 2015

Domingo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

A partir de este ejemplo, diremos que, mediante el razonamiento inductivo, nunca podemos estar seguros de la generalización de estos casos particulares. Incluso un gran número de casos particulares quizá no sería suficiente, por lo que no garantiza un resultado verdadero, sino un medio para una conjetura.

Los alumnos lo explican

Encuentra el número que sigue en la siguiente serie: 3, 6, 9, 15, 24, $\square$
Solución: 39

Respuestas y razonamiento

"Primero observé la secuencia y fui sumándole intuitivamente números al azar y me di cuenta que era la suma del número anterior, por lo que el número siguiente es el 39".

Patricia Rojas Maldonado,
Licenciatura en Tecnologías y Sistemas de Información

"Las diferencias entre cada número de la sucesión se van sumando. De 3 a 6 hay 3, de 6 a 9 hay 3, de 9 a 15 hay 6, de 15 a 24 hay 9… Me di cuenta de eso y respondí la pregunta según mi inducción".

Sebastián Guzmán Pro,
Licenciatura en Ciencias de la Comunicación

Los alumnos lo explican

Encuentra el número que sigue en la siguiente serie: 1/2, 3/4, 5/6, 7/8, 9/10, $\square$
Solución: 11/12

Respuestas y razonamiento

"En un principio trato de ver los números en conjunto, al ver que no hay una relación lógica, observo de nuevo, pero de manera particular cada número, y así la relación se encuentra. Comienzo entonces a sumar número por número. Así la relación tiene sentido y el resultado se obtiene y coincide".

Omar Estrada Aguilar,
Licenciatura en Tecnologías y Sistemas de Información

"Identificando la relación entre números, observé primero los numeradores, vi que eran puros números impares e iban creciendo en forma gradual. Para los denominadores, igual observando me di cuenta que iban aumentando de dos en dos. Manteniendo la relación entre ambos números llegué a la solución".

Ricardo Curiel García,
Licenciatura en Tecnologías y Sistemas de Información

Los alumnos lo explican

Encuentra el número que sigue en la serie: 1, 8, 27, 64, 125, $\boxed{}$
Solución: 216

Respuestas y razonamiento

"Busco una relación visual lógica, pero no la encuentro, procedo a aplicar operaciones básicas y las repito hasta encontrar una secuencia que coincida con la serie que se muestra, no lo encuentro, comienzo a jugar con exponentes. Me doy cuenta que $2^3 = 8$ pero $2^4 = 16$, así que pruebo con 3^3 y obtengo 27, repito $4^3 = 64$ y establezco una relación y completo la serie".

Gerardo Melo Vázquez,
Licenciatura en Tecnologías y Sistemas de Información

"Al principio es una serie muy complicada y pensé en sumar, restar, multiplicar, dividir, hasta que pude descubrir que son números multiplicados al cubo; es decir, 1^3 es igual a 1, 2^3 es igual a 8, 3^3 es igual a 27, 4^3 es igual a 64, 5^3 es igual a 125, 6^3 es igual entonces a 216, y así es como encontré el resultado".

Daniel Armando Jaime González,
Licenciatura en Diseño

Este conjunto de sucesiones son ejemplos excelentes de la aplicación del razonamiento inductivo, en el que, a partir de un conjunto de casos, podemos llegar a determinar el resultado subsecuente. Enseguida mostramos otros ejemplos de sucesiones, en los cuales, al aplicar el razonamiento inductivo, podemos obtener el resultado.

Ejemplo

Determine el siguiente término más probable: 6, 9, 12, 15, 18, $\boxed{\mathbf{21}}$

Ejemplo

Determine el siguiente término más probable: 13, 18, 23, 28, 33, **38**

Ejemplo

Determine el siguiente término más probable: 1/3, 3/5, 5/7, 7/9, 9/11, **11/13**

A partir de estos ejemplos podemos, entonces, proponer un conjunto de ejercicios, como actividad integradora, en la que el alumno practique, se enfrente al problema y dé lo máximo para resolverlo. ¿Cuál es el resultado de las siguientes sucesiones?

Actividad integradora

Ejercicio 1: determine el siguiente término más probable: 3, 12, 48, 192, 768, ?

Ejercicio 2: determine el siguiente término más probable: 32, 16, 8, 4, 2, ?

Ejercicio 3: determine el siguiente término más probable: 3, 6, 9, 15, 24, 39, ?

Ejercicio 4: determine el siguiente término más probable: 1/2, 3/4, 5/6, 7/8, 9/10, ?

Ejercicio 5: determine el siguiente término más probable: 1, 4, 9, 16, 25, ?

Ejercicio 6: determine el siguiente término más probable: 1, 8, 27, 64, 125, ?

El razonamiento deductivo

Después de resolver algunos ejemplos y ejercicios nos damos cuenta que debemos de encontrar alguna forma que nos asegure el resultado que estamos buscando. En otras palabras, que podamos comprobar nuestros hallazgos y conclusiones. A partir de esta necesidad debemos encontrar una forma alternativa de atacar el problema. Es a raíz de esto que podemos utilizar el razonamiento *deductivo*.

Razonamiento deductivo

Se caracteriza por la aplicación de principios generales a ejemplos específicos. El razonamiento deductivo es la base de las demostraciones matemáticas.

Este tipo de razonamiento intenta demostrar una propiedad mediante la deducción de las otras anteriormente ya demostradas; asimismo, este tipo de razonamiento garantiza la verdad de la conclusión, si la información de la que se parte es verdadera.

Para resolver un problema se requieren ciertas "premisas", que puede ser una ley o una regla para llegar a una conclusión. Las premisas y la conclusión componen un argumento lógico. En resumen:

Ejemplo

Un zapatero dice que tarda un día en reparar unos zapatos, pero en realidad tarda dos días. El zapatero te dice: "Tardaré dos días en reparar sus zapatos". ¿Tus zapatos estarán listos en cuatro días?

Solución paso a paso

En el ejemplo anterior tenemos una premisa básica, la cual se toma como el caso generalizado o lo que debe ser la regla a seguir: 1) el zapatero, aunque dice que tarda un día, en realidad tarda dos. Si el zapatero te dice, entonces, que tardará dos días, la conclusión a la que debemos de llegar es que efectivamente tarda cuatro días.

A partir de este ejemplo vemos que la regla o ley que se plantea siempre debe de corroborarse, de este modo, si la conclusión cumple con la regla, entonces diremos que la conclusión es verdadera, y si no lo cumple, entonces la conclusión deberá ser forzosamente falsa.

Ejemplo

Cuando las personas hacen ejercicio, entonces se sienten mejor. Tú haces ejercicio. Por lo tanto, tú te sientes mejor.

Solución paso a paso

Al igual que el ejemplo anterior, siempre la generalización es la regla que se debe cumplir para que la conclusión sea verdadera. En este caso, a partir de la regla enunciada, entonces afirmamos que si haces ejercicio, entonces efectivamente tú deberás de sentirte mejor. Por lo que es un razonamiento deductivo.

Ejemplo

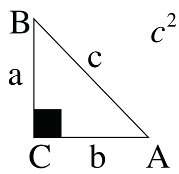
Si el mismo número se suma en ambos miembros de una igualdad verdadera, la nueva igualdad también deberá ser verdadera. Si yo sé que 15 + 5 = 20, entonces (15 + 5) + **10** = 20 + **10**.

Solución paso a paso

El razonamiento es el mismo, a partir de la regla inicial general que dice que ambos miembros de una ecuación son iguales, entonces al sumar el mismo número en ambos lados de la ecuación seguirá cumpliéndose la igualdad (en este caso 10).

Ejemplo

Teorema de Pitágoras: "En un triángulo rectángulo la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos".

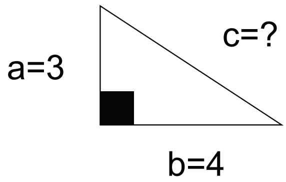


$$c^2 = a^2 + b^2$$

Solución paso a paso

Esta generalización que produce la demostración permite la aplicación de un teorema dado en cualquier caso particular. Entonces, si quisiéramos conocer el elemento desconocido C, entonces tendríamos que su valor es igual a 5.

$$3^2+4^2=c^2$$
$$9+16=c^2$$
$$25=c^2$$
$$c=5$$



Un uso sencillo y muy útil de aplicar el razonamiento deductivo es lo que formalmente se denomina la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética, en concreto, con la suma de los n primeros números naturales. Este método propuesto por Carl Friedrich Gauss en 1785, cuando apenas tenía ocho años de edad, sentó las bases de la formalización y la generalización de las primitivas básicas para resolver problemas.

Cuenta la historia que un día Gauss fue a la escuela. Su maestra les puso una tarea muy sencilla, pero bastante laboriosa: sumar todos los números del 1 al 100. Tan pronto como les dijeron, todos los niños del salón empezaron a sumar, pero a Gauss se le hizo demasiado aburrido recorrer todo el camino a *pie*, así que utilizó ciertas propiedades de los números enteros para terminar más rápido haciendo menos esfuerzo.

La reflexión de Gauss seguramente fue la siguiente: La maestra nos pide que sumemos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 99 + 100.$$

Si sumo el último valor de la lista con el primer valor de la lista, y empiezo a sumar de esta forma los elementos internos de la lista, entonces podría obtener siempre el mismo valor.

1	+	2	+	3	+	4	+	...
100	+	99	+	98	+	97	+	...
101	+	101	+	101	+	101	+	...

Entonces, la solución comienza a surgir, 1 más 100 es igual que 2 más 99, que 3 más 98 y así sucesivamente; como hay 50 de estas sumas y cada una de ellas suma 101, en total tenemos 101 por 50, que es 5050. Lo que significa que la regla es la siguiente:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

En conclusión, muchas veces lo que parece difícil se hace fácil si te decides a pensar en resolver el problema que tienes enfrente. Como se observa, conocer unas pocas propiedades de las cosas que estemos operando, y aplicarlas a un problema específico, ayuda bastante a reducir el esfuerzo que se supone necesario para resolverlo sin aplicar tales propiedades.

Método de Gauss

Es la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética, en concreto, con la suma de los n primeros números naturales. La generalización de este método está dado entonces por:

$$s = 1+2+3+4+5+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

A continuación damos algunos ejemplos:

Ejemplo

Utiliza la generalización del método de Gauss para obtener el resultado de la progresión numérica siguiente: 1+2+3+…+200

Solución paso a paso

El resultado, entonces, lo podemos obtener de manera rápida utilizando la generalización propuesta por Gauss:

Resultado = (200 (200 +1))/2 = **20100**

Ejemplo

Utiliza la generalización del método de Gauss para obtener el resultado de la progresión numérica siguiente: 1+2+3+...+800

Solución paso a paso

El resultado entonces, lo podemos obtener de manera rápida utilizando la generalización propuesta por Gauss:

Resultado = (800 (800 +1))/2 = **320400**

Ejemplo

Utiliza la generalización del método de Gauss para obtener el resultado de la progresión numérica siguiente: 2+4+6+...+100

Solución paso a paso

El resultado, entonces, lo obtenemos rápidamente utilizando la generalización propuesta por Gauss:

Resultado = (100 (100 +2))/4 = **2550**

En este ejemplo, la generalización varía de acuerdo al comportamiento de la progresión numérica específica, de este modo, al sumar los extremos da como resultado 102 y la progresión aumenta de dos en dos, significa que la suma total deberá ser dividida entre 4 y no entre dos.

A partir de estos ejemplos, podemos entonces proponer un conjunto de ejercicios para que practicar y aplicar la generalización adecuada para poder resolverlos.

Actividad integradora

¿Cuál es el resultado de la suma de las siguientes progresiones?

Ejercicio 7: determine la suma de la progresión numérica siguiente: 1+2+3+...+175, **?**

Ejercicio 8: determine la suma de la progresión numérica siguiente: 2+4+6+...+300, **?**

Ejercicio 9: determine la suma de la progresión numérica siguiente: 4+8+12+...+200, ?

Ejercicio 10: determine la suma de la progresión numérica siguiente: 3+6+9+...+99, ?

El razonamiento abstracto

El razonamiento, como lo estudiamos anteriormente, es el proceso que permite estructurar y organizar pensamientos para desarrollar una conclusión. El razonamiento abstracto hace referencia a la capacidad de observación y organización lógica, de manera que se puedan extraer conclusiones a partir de unos datos concretos. El adjetivo (abstracto) se refiere a una propiedad específica de un objeto, dejando de lado el resto de las propiedades.

La idea del razonamiento abstracto se emplea para nombrar el proceso que posibilita que una persona resuelva problemas de tipo lógico. Este razonamiento permite partir de una determinada situación y deducir consecuencias de ésta.

A la hora de desarrollar un razonamiento abstracto, conviene encarar el proceso desde dos dimensiones: por un lado, se deben analizar los distintos elementos de manera aislada; por el otro, se debe prestar atención al conjunto. De esta forma es posible advertir patrones o tendencias que permiten arribar a una conclusión.

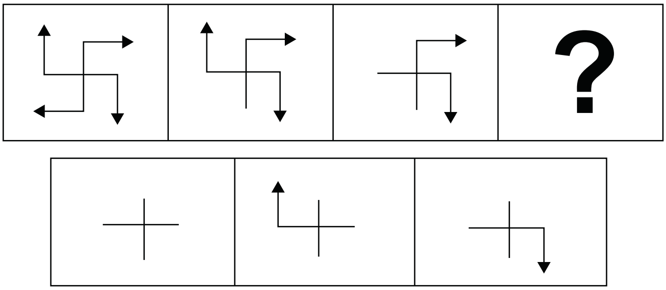
En cualquier ejercicio de razonamiento abstracto se aprecia un patrón de comportamiento. Cuando los protagonistas son las figuras, dicho patrón estaría centrado en cambios de color, de forma o de posición. Además, si en un cuadro hay más de una figura, cada una actuaría de manera independiente o en relación con los cambios de otra. Esto puede parecer demasiado complicado al principio, pero no lo es si se procede con paciencia y atención.

Razonamiento abstracto

Representa la capacidad y agilidad actual del sujeto para establecer lazos entre diversos elementos y descubrir las relaciones existentes en el seno de conjuntos complejos.

Ejemplo

A partir de la observación de los tres casos iniciales, determina cuál es la figura siguiente y que reemplaza al símbolo de interrogación.



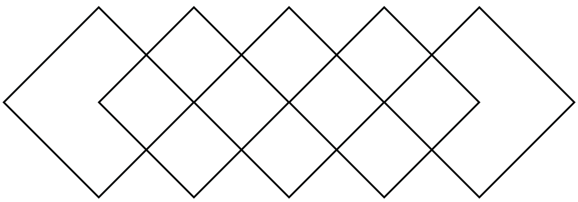
(A) (B) (C)

Solución paso a paso

A partir de la observación de los tres primeros casos, y si los analizamos aisladamente, apreciamos que en cada uno desaparece una flecha y esa desaparición no es aleatoria, sino que lleva un orden. En el primer caso están todas las flechas. En el segundo, ha desaparecido la flecha que apunta al oeste. En el tercer caso ha desaparecido la flecha que apunta al norte. Por lo que concluimos que la próxima flecha a desaparecer es la que apunta hacia el este. Si analizamos la respuesta posible, la respuesta **C** es la que refleja esta situación.

Los alumnos lo explican

¿Cuántos rectángulos (incluyendo cuadrados), de cualquier tamaño, se forman en la figura siguiente?



Respuestas y razonamiento

"Sólo conté visualmente".

Ana Guadalupe López Guadarrama,
Licenciatura en Diseño

"Primero observé la figura, luego la dividí y conté los rectángulos que tenía cada figura más pequeña, contaba los que se encimaban y obtuve entonces el resultado".

David Arturo Martínez Mateos,
Licenciatura en Diseño

"Para intentar resolver el problema de los rectángulos, busqué las formas marcadas y delineadas que formaban rectángulos, suponiendo que el rectángulo es una figura con 4 ángulos rectos, 4 lados y 2 más grandes que los otros 2".

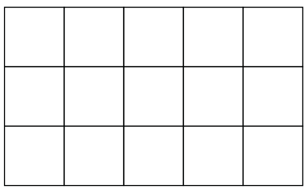
Alondra Xóchitl Velasco Esparza,
Licenciatura en Diseño

"Conté todas las intersecciones que formaban un cuadrado (4) y conté 15, pero solo me basé en los cuadrados normales".

Kevin Misael González Arroyo,
Licenciatura en Ciencias de la Comunicación

Los alumnos lo explican

¿Cuántos cuadrados, de cualquier tamaño, se forman en la figura siguiente?



Respuestas y razonamiento

"Sólo separé los puntos y líneas donde cruzaban para hacer un rectángulo y al final los sumé, lo hice individualmente para comprobar".

Iván Salazar Medina,
Licenciatura en Ciencias de la Comunicación

"Se puede resolver creando el rectángulo desde el inicio, cada cuadrícula cuenta como 1. Ir así sumando y acumulándolos teniendo el cuidado de no repetir".

Pedro Jacobo López del Campo,
Licenciatura en Ciencias de la Comunicación

"Para resolver el problema de los rectángulos, conté visualmente y, en segunda instancia, intenté hacer una réplica en mi cuaderno para intentar contar mientras realizaba el dibujo".

Benjamín Ortega Martínez,
Licenciatura en Diseño

"Primero multipliqué ancho por alto y después sumé los rectángulos internos hasta terminar".

Erick Kai-Shek Lee Espino,
Licenciatura en Diseño

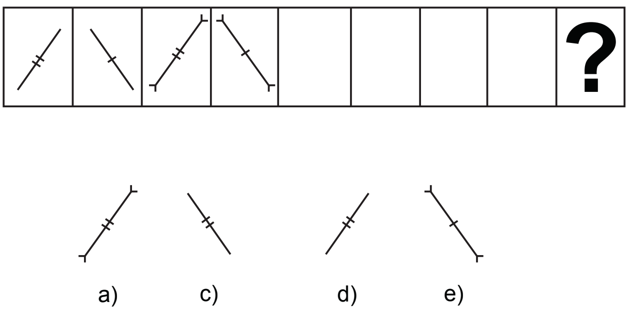
"Primero realicé la suma de los cuadrados grandes. Después sumé los rectángulos diagonales que cuentan con 2 cuadrados y posteriormente los que tienen 3 cuadrados. Por último, realicé el mismo procedimiento que el paso anterior a la inversa".

Jonathan Martínez Rojas,
Licenciatura en Diseño

Este conjunto de opiniones muestra la diversidad de enfoques que existen para afrontar un problema abstracto de estas características. Enseguida mostramos algunos ejemplos de razonamiento abstracto, en los que la identificación de patrones y comportamiento resultan muy importantes para su solución.

Ejemplo

¿Cuál de las alternativas reemplaza al signo de interrogación?

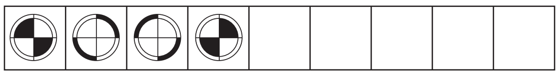


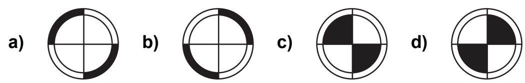
Solución paso a paso

Para resolver este ejemplo, basta con continuar con el patrón establecido por los cuatro casos iniciales. La posición en donde se encuentra el signo de interrogación corresponde a una línea inclinada, cuya parte superior se dirige hacia la derecha. Finalmente, debemos saber si esta línea inclinada cuenta o no con puntas. Siguiendo igualmente el patrón establecido, llegamos a la conclusión de que la línea buscada es el inciso c.

Ejemplo

¿Cuál de las alternativas reemplaza al signo de interrogación?



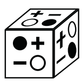


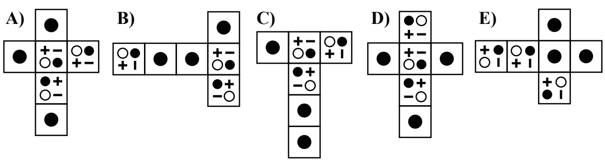
Solución paso a paso

Al igual que en el ejemplo previo, en este problema basta con continuar con el patrón inicial, en el que podemos descartar rápidamente las opciones c y d. Posteriormente, tenemos que verificar el comportamiento de los elementos a y b. Al continuar de igual forma respetando el patrón, concluimos que la opción **a** es la que corresponde estar en el signo de interrogación.

Ejemplo

¿Qué alternativa corresponde a la formación del siguiente cubo?





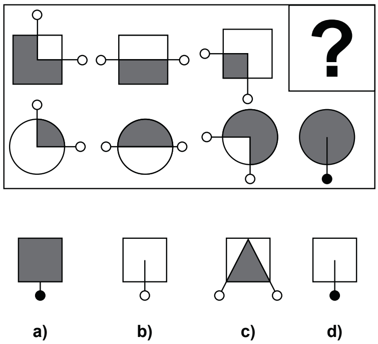
Solución paso a paso

Para resolver este ejemplo, inicialmente debemos analizar correctamente el cubo e identificar en alguna de las caras un patrón. En la cara frontal del cubo identificamos un punto negro y uno blanco, los cuales se encuentran distribuidos diagonalmente. De este modo, descartamos la opción A. Posteriormente, debemos reconstruir el cubo (de manera mental) con las configuraciones restantes. Al hacer esto, nos percatamos que la única opción que corresponde con el cubo inicial es la opción **B**.

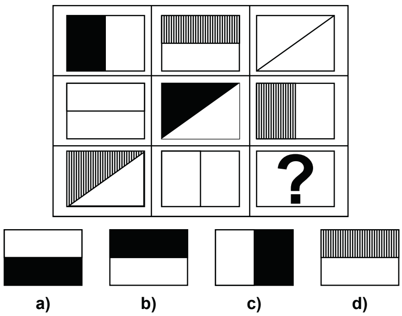
A partir de estos ejemplos podemos, entonces, proponer un conjunto de ejercicios para que se practiquen las abstracciones, así como observar adecuadamente y descubrir la organización lógica correspondiente.

Actividad integradora

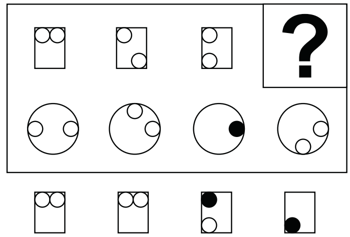
Ejercicio 11: ¿cuál de las alternativas reemplaza al signo de interrogación?



Ejercicio 12: ¿cuál de las alternativas reemplaza al signo de interrogación?

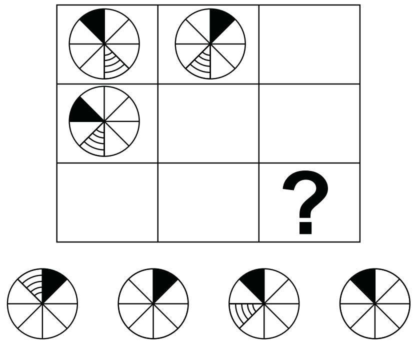


Ejercicio 13: ¿cuál de las alternativas reemplaza al signo de interrogación?



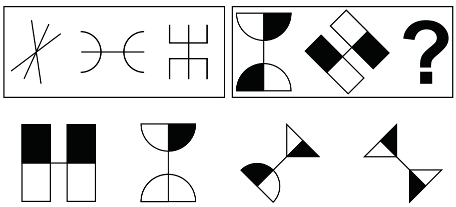
a) b) c) d)

Ejercicio 14: ¿Cuál de las alternativas reemplaza al signo de interrogación?



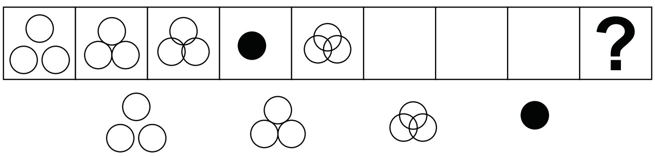
a) b) c) d)

Ejercicio 15: ¿cuál de las alternativas reemplaza al signo de interrogación?



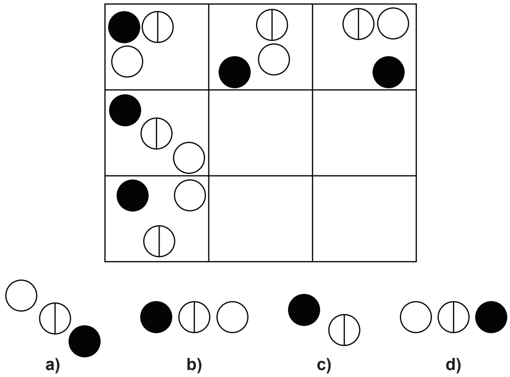
a) b) c) d)

Ejercicio 16: ¿cuál de las alternativas reemplaza al signo de interrogación?

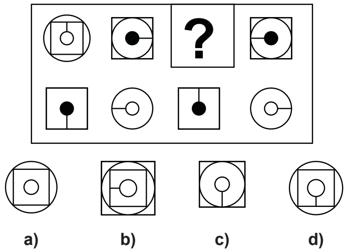


a) b) c) d)

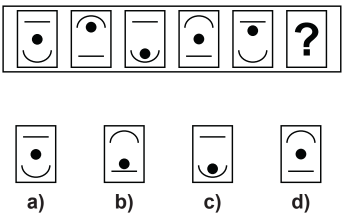
Ejercicio 17: ¿cuál de las alternativas reemplaza al signo de interrogación?



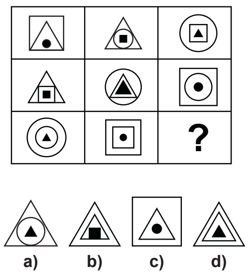
Ejercicio 18: ¿cuál de las alternativas reemplaza al signo de interrogación?



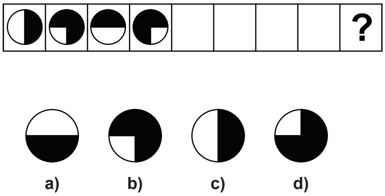
Ejercicio 19: ¿cuál de las alternativas reemplaza al signo de interrogación?



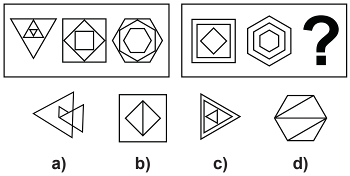
Ejercicio 20: ¿cuál de las alternativas reemplaza al signo de interrogación?



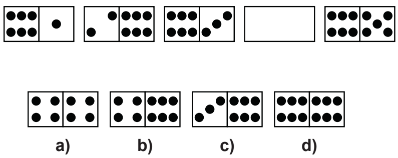
Ejercicio 21: ¿cuál de las alternativas reemplaza al signo de interrogación?



Ejercicio 22: ¿cuál de las alternativas reemplaza al signo de interrogación?



Ejercicio 23: ¿cuál de las alternativas reemplaza al signo de interrogación?



La resolución de problemas matemáticos

Actualmente, la resolución de problemas se considera la parte más esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los alumnos experimentan la potencia y utilidad de las matemáticas en el mundo que les rodea.

En los problemas no es evidente el camino a seguir; incluso, puede haber varios; desde luego que eso no se enseña previamente. Hay que apelar a conocimientos dispersos, y no siempre de matemáticas; conviene relacionar saberes procedentes de campos diferentes, hay que poner a punto relaciones nuevas.

Por lo tanto, para resolver un problema es preciso poner en juego conocimientos diversos (matemáticos o no) y buscar relaciones nuevas entre sí. Además, tiene que ser una cuestión que nos interese, que nos despierte las ganas de resolverla, una tarea a la que estemos dispuestos a dedicarle tiempo y esfuerzos. Además, debería de tener un componente de placer y satisfacción para que ese proceso sea duradero.

Para resolver problemas no existen fórmulas mágicas; tampoco existe un estándar o procedimientos fijos para la resolución del problema (incluso en el caso de que tenga solución). Lo que es inaceptable es que se diga que la resolución de problemas se da por "ideas luminosas" que se tienen o no.

Evidentemente, hay personas con más capacidad para resolver problemas que otras de su misma edad y formación parecida. Normalmente, estas personas aplican (por lo general inconscientemente) toda una serie de métodos y mecanismos que de manera normal son los correctos para abordar y resolver los problemas.

Resolución de un problema

La resolución de problemas es lo que haces cuando no sabes qué hacer.

George Pólya, matemático húngaro nacido en 1887 y muerto en 1985, propuso cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema, que constituyen el punto de arranque de todos los estudios posteriores:

Comprender el problema → Trazar un plan para resolverlo → Poner en práctica el plan → Comprobar los resultados

Muchas veces creemos que *comprender un problema* es tarea fácil. Sin embargo, es una parte fundamental y de capital importancia, sobre todo cuando los problemas por resolver no son de formulación estrictamente matemática. Para comprender un problema correctamente, debemos hacer y responder lo siguiente:

La comprensión del problema

- Leer detenidamente el enunciado .
- ¿Conocemos los datos a utilizar?
- ¿Qué buscamos? ¿Qué necesitamos encontrar?
- Debemos tratar de encontrar la relación que existe entre los datos y las incógnitas.
- Si es posible, entonces elaborar un esquema o dibujo de la situación.

Una vez comprendido el problema, necesitamos trazar el plan para resolverlo, de ahí que debamos generar la estrategia adecuada para afrontarlo. En esta etapa, también debemos hacer y responder lo siguiente:

Trazar un plan para resolver el problema

- ¿El problema es parecido a otros que ya conocemos y hemos resuelto con antelación?
- ¿Podríamos plantearlo de otra forma?
- ¿Imaginaríamos un problema parecido, pero más sencillo?
- Si suponemos que el problema ya está resuelto, ¿cómo se relaciona la situación final (del resultado) con los datos de inicio?¿Estamos utilizando todos los datos que tenemos a la mano cuando se hace el plan?

La tercera etapa se vincula con la puesta en práctica del plan antes definido. Esta acción se planteará flexible y recursivamente (capacidad de regresar en el proceso). Esta puesta en práctica del asunto quizá tenga saltos y no sea completamente lineal. En esta etapa, también debemos hacer y responder lo siguiente:

Puesta en práctica del plan

- Debemos comprobar cada uno de los pasos definidos en el plan.
- ¿Podemos determinar claramente qué cada paso es correcto?
- Antes de aplicar cualquier paso o realizar algún cálculo, debemos pensar qué conseguiremos con ello.
- Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación, contando qué y para qué se hace.

Cuando se tropieza con alguna dificultad que nos bloquea, se debe retornar al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

Finalmente, está la etapa de comprobación de los resultados, en la que debemos validar que el resultado obtenido corresponda a las necesidades iniciales que teníamos planteadas. En esta etapa podemos hacer y responder lo siguiente:

Comprobar los resultados

- Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado.
- Analizar la solución a la que llegamos. ¿Parece lógicamente posible?
- ¿Hay algún otro modo de resolver el problema?
- ¿El problema tendría múltiples soluciones?
- Debemos acompañar la solución de una explicación que indique claramente lo que se ha hallado.
- Se utilizará el resultado obtenido y el proceso seguido para formular y plantear nuevos problemas.

Por último, haremos una recopilación de las estrategias más frecuentes que se utilizan en la resolución de problemas.

Estrategias generales para la resolución de problemas

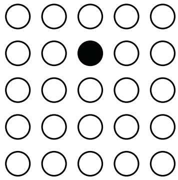
- Ensayo-error.
- Empezar por lo fácil, resolver un problema semejante más sencillo.
- Descomponer el problema en pequeños problemas (simplificar).
- Resolver problemas análogos.
- Seguir un método (organización).
- Elaborar esquemas, tablas, dibujos (representación).
- Deducir y sacar conclusiones.
- Analizar los casos límite.
- Reformular el problema.
- Empezar por el final (dar el problema por resuelto).

La destreza para resolver problemas no es sencilla y se aprende con paciencia y considerable esfuerzo, debemos enfrentarlos con tranquilidad, tratando de sacar el mejor partido posible de todos los esfuerzos iniciales, observando los modos de proceder, comparándolos con otros problemas.

A continuación mostramos ejemplos con algunas de las estrategias generales para la solución de problemas.

Ejemplo

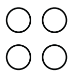
Colocamos en una mesa 25 monedas iguales en la siguiente posición y selecciono una al azar:



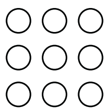
¿Podría hacer un recorrido pasando por las 25 monedas, pero, pasando de una moneda a otra de manera horizontal y vertical, sin repetir moneda?

Solución paso a paso

Para resolver el problema, empecemos por intentar resolverlo con menos monedas, por ejemplo, con 4 y en una configuración 2×2:



En este caso, es obvio que podemos hacer el recorrido total, pasando por las 4 monedas. Es un caso muy simple, en el que sí se cumple el objetivo. Ahora intentemos con 9 monedas y en una configuración 3×3:



Si empezamos el recorrido de una esquina o en el centro es muy simple: el problema empieza cuando seleccionamos cualquier otra moneda. Al intentar el recorrido resulta imposible, ya que llegaríamos a un callejón sin salida. Así, en este caso de 3×3, a veces haremos el recorrido y otras no. Podemos sospechar que, en caso de 5×5, suceda algo parecido. Si analizamos las coordenadas de las 9 monedas, obtendríamos lo siguiente:

$$
\begin{array}{ccc}
(-1,1) & (0,1) & (1,1) \\
(-1,0) & (0,0) & (1,0) \\
(-1,-1) & (0,-1) & (1,-1)
\end{array}
$$

Entonces, siempre que sumemos las coordenadas y obtengamos un número par, entonces podremos realizar el recorrido. Cuando la suma de las coordenadas sea impar, entonces será imposible realizarlo.

Si éste es el caso, entonces diremos que para el caso de 5 × 5 monedas el fenómeno se comportará de igual manera y será fácil encontrar las posiciones en las que se haga el recorrido y las posiciones donde es imposible llevarlo a cabo.

Esta estrategia que acabamos de aplicar, “Empezar por lo fácil, resolver un problema semejante más sencillo”, se practica en multitud de circunstancias. Un problema resulta difícil dado su tamaño, por tener demasiados elementos que lo vuelven complicado. Para empezar, resolvamos un problema semejante lo más sencillo posible. Luego lo complicaremos hasta llegar al propuesto inicialmente. Procediendo así, nos animaremos con el probable éxito, ya que la manipulación efectiva en un problema de pocas piezas es más fácil que en uno de muchas.

Ejemplo

Un hombre puso una pareja de ratones en una jaula. Durante el primer mes, los ratones no tuvieron descendencia, pero a partir del segundo mes empezaron a procrearr una pareja de ratones por mes. Si cada nueva pareja se reproduce de la misma manera, ¿cuántas parejas de ratones habrá al final de diez meses?

Solución paso a paso

Este ejemplo sería más claro si elaboramos un cuadro en el que apreciemos lo que pasa. Inicialmente tenemos los meses, diez en este caso. Debemos registrar, mes tras mes, lo que ocurre con los ratones. Otra variable que tenemos es el número de parejas al inicio de cada mes; con esta información intentaremos identificar el número de parejas engendradas durante el mes y, finalmente, determinar el número de parejas que tendremos al final de cada mes. En el primer mes tendremos la siguiente información:

Mes	*# parejas al inicio*	*# de nuevas parejas producidas*	*# de parejas al final del mes*
1	1	0	1

Éste es el caso más simple, sin embargo, en el segundo mes la situación y las reglas cambian, dando lugar a una nueva información:

Mes	*# parejas al inicio*	*# de nuevas parejas producidas*	*# de parejas al final del mes*
2	1	1	2

Y siguiendo con esta lógica, veremos lo que ocurre en el tercer mes:

Mes	*# parejas al inicio*	*# de nuevas parejas producidas*	*# de parejas al final del mes*
3	2	1	3

En el cuarto mes tendremos

Mes	*# parejas al inicio*	*# de nuevas parejas producidas*	*# de parejas al final del mes*
4	3	2	5

El cuadro completo, a partir del quinto mes es, entonces, el siguiente:

Mes	*# parejas al inicio*	*# de nuevas parejas producidas*	*# de parejas al final del mes*
5	5	3	8
6	8	5	13
7	13	8	21
8	21	13	34
9	34	21	55
10	55	34	89

Por lo que al final del décimo mes tendremos 89 parejas de ratones.

Hay muchos problemas que son muy transparentes cuando se encuentra una representación visual adecuada de los elementos que intervienen en aquél. Pensamos mucho mejor con el apoyo de las imágenes que con el de palabras, números o símbolos solamente.

En este ejemplo recurrimos a la estrategia de "Plasmar la información en un cuadro" para analizar el comportamiento de los ratones y observar paso a paso lo que ocurre. Por ello es muy aconsejable, a fin de dar con buenas ideas que sirvan para resolver el problema, esquematizar y dibujar (incluso colorear) para mayor claridad, los elementos que aparecen en la situación estudiada.

La imagen, diagrama o cuadro que elaboremos de un problema, debe, de forma sencilla, permitir incorporar los datos relevantes y suprimir los datos o aspectos superfluos que conduzcan a confusión. De esta manera, se resaltarán visualmente las relaciones entre los aspectos importantes del problema, y de ahí, muy a menudo, se desprenden luces que aclaran e iluminan sustancialmente la situación.

Ejemplo

Cada semana, a Juan le gustaba apostar dinero. En la primera triplicó su dinero, pero luego perdió \$12. La segunda semana duplicó el dinero, pero después perdió \$40. La tercera cuadruplicó el dinero, no perdió nada y regresó con un total de \$224.
¿Con cuánto dinero empezó la primera semana?

Solución paso a paso

Al analizar los elementos brindados en este problema, nos percatamos que, invariablemente, debemos empezar tomando en cuenta el valor de \$224, que es el valor final. A partir de este punto, retrocedamos en el análisis para identificar con cuánto dinero empezó la semana.

Entonces, si en la tercera semana cuadruplicó el dinero y no perdió nada, entonces en la tercera semana empezó con la cantidad de 56 pesos $224/4 = 56$.

En la segunda semana tenemos $56 + 40 = 96$. Y $96/2 = 48$. Por lo que la segunda semana la inició con 48 pesos.

Finalmente, en la primera semana, tenemos $48 + 12 = 60$. Pero como lo había triplicado, entonces al inicio tenía 20 pesos.

Ésta es una situación típica en la que aplicamos la estrategia "empezar por el final" para solucionar el problema.

Ejemplo

El matemático August de Morgan vivió en el siglo XIX. En cierta ocasión, afirmó: "Yo tenía x años en el año x^2". ¿En qué año nació De Morgan?

Solución paso a paso

Este problema es muy sencillo, en el que no contamos con mucha información al respecto. Sabemos que el matemático vivió entre 1800-1899 y que realizó la afirmación correspondiente.

En este caso, no nos queda más que aplicar la estrategia de "ensayo y error", y probar algunos números al azar. Por lo tanto, debemos prestar atención en los números que, elevados al cuadrado, el resultado esté dentro del rango definido (1800-1899).

x años	*Año x^2 en el que vivió*
20	400
30	900
40	1600
42	1764
43	1849
44	1936
50	2500

Encontramos, entonces, el número que corresponde al rango mencionado. Por último, según lo que dijo el matemático, entonces él tenía 43 años en el año 1849. De esta forma, el matemático nació en **1806**.

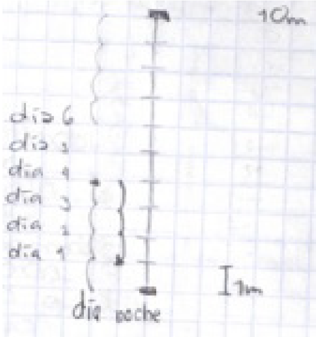
Los alumnos lo explican

Un grillo está en el fondo de un pozo de 10 metros. Cada día sube 4 metros, pero en la noche cae 3. ¿Cuántos días tienen que pasar para que el grillo llegue a la superficie?

Respuestas y razonamiento

"Para el problema del grillo, elaboré una gráfica del comportamiento que tenía el grillo, teniendo en cuenta que por el día subió 4 m y descendía 3 m por la noche, entonces, para el día 7 ya habría alcanzado la superficie del pozo".

Alejandro Díaz Ávalos,
Licenciatura en Tecnologías y Sistemas de la Información



"Para el problema del grillo, sólo se necesitó sumar, decía que cada día subía 4 metros y en la noche caía 3. Entonces, en total subía 1 m. Al llegar al 6º día, había subido 5 metros, ya que empezó del 0. Entonces al 7º día es cuando empieza del metro 6 y logra llegar a la superficie por lo que la respuesta es 7".

Mario Iván Martínez Cerón,
Licenciatura en Tecnologías y Sistemas de la Información

Los alumnos lo explican

Estoy pensando en un número positivo. Si lo elevo al cuadrado, luego duplico el resultado, le quito la mitad y después de sumarle 12 me quedan 37. ¿En qué número pensé?

Respuestas y razonamiento

"Primero intenté planearlo como una ecuación $2(x^2)/2 + 12 = 37$. Empecé a despejar la incógnita, entonces $x^2 + 12 = 37$. Después $x^2 = 37 - 12 = 25$. Finalmente, x = raíz cuadrada de 25 y el resultado es 5".

Lorena Sierra Bautista,
Licenciatura en Ciencias de la Comunicación

"Para resolver el problema del número, fue utilizar el método de atrás hacia adelante. Me dieron el resultado y a partir de ahí fui haciendo las operaciones que decía el problema en reversa, hasta sacar el principio de los números que era el resultado final".

Hugo Alejandro Márquez Guevara,
Licenciatura en Tecnologías y Sistemas de la Información

A partir de estos ejemplos y de las experiencias previas de los alumnos, podemos proponer un conjunto de ejercicios para poner en práctica con la aplicación de estrategias para resolver problemas. Cabe recordar que en muchos problemas es muy importante comprender exactamente qué se pide hallar, antes de intentar calcularlo.

Actividad integradora

Ejercicio 24: si un ladrillo se equilibra con tres cuartos de ladrillo, más una pesa de tres cuartos de kilo, entonces: ¿cuánto pesa un ladrillo?

Ejercicio 25: un niño compró una paleta en 7 pesos, la vendió en 8, la volvió a comprar en 9 pesos y finalmente la vendió en 10. ¿cuánto beneficio obtuvo?

Ejercicio 26: una botella de vino espumoso cuesta 10 dólares. Únicamente el vino cuesta nueve dólares más que la botella, ¿cuánto cuesta solamente la botella?

Ejercicio 27: entre Pedro, Luis y Antonio tienen 500 pesos. Sabiendo que Antonio tiene el doble que Luis y Luis tiene tres veces más que Pedro, ¿cuánto tiene Pedro?

Ejercicio 28: cierta tienda de animales vende loros y periquitos; cada loro se vende a dos veces el precio de un periquito. Entró una señora y compró cinco loros y tres periquitos. Si en vez de eso hubiese comprado tres loros y cinco periquitos, habría gastado 20 dólares menos; ¿cuál es el precio de un loro y de un periquito?

Ejercicio 29: sabiendo que 3 manzanas y una pera pesan lo mismo que 10 duraznos, y 6 duraznos y una manzana pesan lo mismo que una pera, ¿cuántos duraznos serán necesarios para equilibrar una pera?

Ejercicio 30: un comerciante llegó al mercado a vender zanahorias. La primera clienta le compró la mitad de todas las zanahorias más media zanahoria. La segunda clienta adquirió la mitad de las zanahorias que le quedaban más media zanahoria. La tercera clienta sólo compró una zanahoria. Con esto terminó la venta del día; ¿cuántas zanahorias llevó al mercado el comerciante?

Ejercicio 31: Ana tiene el triple de monedas que Carlos. Diego tiene la mitad que Carlos. Ana tiene 16 monedas más que Carlos, ¿cuántas monedas tienen en total Ana, Carlos y Diego?

Ejercicio 32: una pastelería contrató a un empleado para trabajar durante 26 días. Estipularon que por cada día que trabajara, recibiría 3 pasteles, pero por cada día que no hiciera el trabajo, no sólo no recibiría ninguno, sino que tendría que regresarle uno a la empresa. El empleado terminó ganando 62 pasteles, ¿cuántos días trabajó?

Ejercicio 33: una banda de ladrones robó un museo y el jefe de ellos les dijo: "Hemos robado unos cuadros. Si cada uno de nosotros toma seis, quedarán cinco piezas. Pero si cada uno de nosotros quiere siete, nos faltarían ocho", ¿cuántos ladrones entraron al museo?

Ejercicio 34: en una lápida se leía esta inscripción: "Aquí yace Pedro el Grande, muerto en 1971, vivió tantos años como la suma de las cifras del año de su nacimiento". ¿A qué edad murió?

Ejercicio 35: mi hijo es ahora tres veces más joven que yo; pero hace cinco años era cuatro veces más joven, ¿cuántos años tiene actualmente?

En este primer capítulo estudiamos los elementos básicos para resolver problemas complejos. Explicamos diferentes formas de razonar, mostrando un conjunto de ejemplos que caracterizan el tipo de razonamiento y proponiendo un conjunto importante de ejercicios para poner en práctica lo aprendido.

Se planteó un conjunto de estrategias para resolver problemas, las cuales nos ayudan a afrontar y brindar solución a un conjunto muy diversos de aquéllos. Los problemas aquí tratados son de índole cotidiana, lo cual intenta ser una motivación para el alumno, quien se da cuenta de que la resolución de problemas matemáticos está en todas partes.

Asimismo, conviene señalar los diversos puntos de vista y la forma de afrontar los problemas de otros alumnos. La sección de "Los alumnos lo explican" pone al descubierto la forma y el pensamiento de los educandos, pues ellos plasman la metodología que utilizaron para llegar a la solución del problema en cuestión.

Para mayor información

Kendall Hunt (2011) y UADM (2016).

Introducción a la teoría de conjuntos

En matemáticas el arte de proponer una pregunta
debe tener mayor valor que resolverla.
GEORG CANTOR

Objetivo

Que el alumno sea capaz de entender la teoría de conjuntos y aplicar elementos de ésta en la resolución de problemas.

Todos los seres humanos tenemos la tendencia a realizar agrupaciones de manera natural, las constelaciones (conjunto de estrellas), gente (conjunto de humanos), etc. De esta forma, nuestra mente trata de encontrar orden y patrones. Esta tendencia a realizar agrupaciones recibe el concepto de *conjunto*, el cual es una colección de objetos (números, personas, colores, etc.). Cada objeto que pertenece a un conjunto lo llamaremos elemento o miembro de un conjunto.

Conjunto

Un conjunto es una colección de elementos considerada en sí misma como un objeto. Los elementos de un conjunto pueden ser cualquier cosa: personas, números, colores, letras, figuras.

Expresiones de un conjunto

Existen varias formas de referirnos a un conjunto específico: podemos utilizar la *descripción verbal* {conjunto de los números naturales menores que diez}; *la enumeración o listado* {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} o la llamada *notación de conjuntos* {x|x es un número natural menor a 10}.

Un conjunto se denota con una letra mayúscula A, B, C y los elementos por una letra minúscula a, b.

A los elementos se les encierra entre llaves ({}) y se separan por comas (,).

Ejemplo

Descripción verbal	*Enumeración*	*Notación de conjuntos*
El conjunto D cuyos elementos son los números que aparecen al lanzar un dado	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	{x|x es un número natural menor a 7}
El conjunto de días de la semana	{Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado, Domingo}	{x|x es un día de la semana}
El conjunto de las vocales	{a, e, i, o, u}	{x|x es vocal}
El conjunto de los números enteros pares positivos menores que diez.	{2, 4, 6, 8}	{x|x es un número entero par menor a 10}

Ejercicio 1: dada la siguiente descripción verbal, haga una enumeración y genere la notación de conjunto para los siguientes casos:

1. El conjunto de los números naturales entre 7 y 14.
2. Meses del año.
3. El conjunto de colores que forman el arcoiris.
4. El conjunto de número naturales impares menores a 5.
5. Países de Norteamérica.

Clasificación de conjuntos

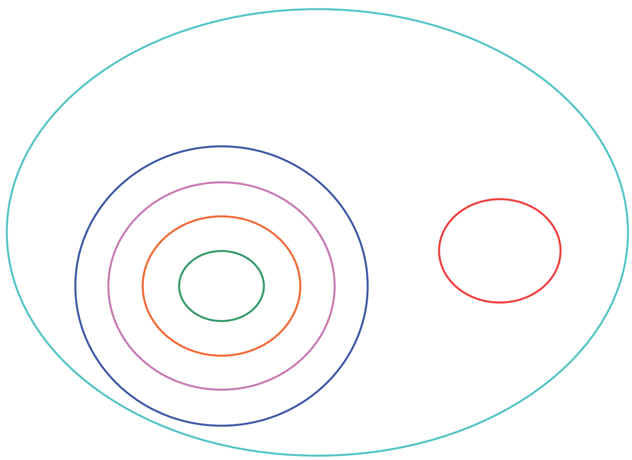
Según la cantidad de elementos que tenga un conjunto, se pueden clasificar de la siguiente manera:

- *Conjuntos finitos* son los que tienen un número conocido de elementos. Como el conjunto de números que aparecen al lanzar un dado, el conjunto de los días de la semana, el conjunto de las vocales, etcétera.
- *Conjuntos infinitos* son los que tienen un número ilimitado de elementos. Como el conjunto de los números reales, el conjunto de los números reales entre 2 y 5, el conjunto de estrellas, entre otros.
- *Conjunto universal* es el conjunto de todos los elementos considerados en un problema o situación dada. Notemos que el conjunto universal no es único, depende de la situación. Se denota con el símbolo $\cup$.
- *Conjunto vacío* es el conjunto que no tiene elementos y se denota por $\varnothing$ o { }.

Como el conjunto de los meses del año con 27 días. Es un error denotar el conjunto vacío como {∅}, ya que esta notación representa un conjunto que sí tiene un elemento, el vacío.

Cuando hablamos de números, evidentemente existen conjuntos que pueden clasificarse en una categoría diferente, lo cual representamos a continuación:

Conjunto de los números naturales	N = {1, 2, 3, 4, 5, 6,…}
Conjunto de los números cardinales	C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,…}
Conjunto de los números enteros	Z = {…-3,-2, -1, 0, 1, 2, 3, …}
Conjunto de los números racionales	Q = {… 1/2 ,…, 1/3, …0/4, … 2/5, … }
Conjunto de los números irracionales	I = {π, √, 7, …}
Conjunto de los números reales	R = {Contiene a todos los anteriores}



Generalmente, el número de elementos contenidos en un conjunto se llama *cardinalidad* del conjunto. Se utiliza el símbolo $n(A)$, el cual se lee "n de A" para representar en número cardinal del conjunto A. Cabe señalar que, cuando un elemento se repite en la lista de un conjunto, entonces no se debe contar más de una vez para determinar la *cardinalidad* del conjunto. De esta forma el conjunto B = {1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3} sólo tiene tres elementos diferentes, por lo que $n(B)= 3$.

Es importante mencionar que para que un conjunto sea útil, debe estar bien definido. Esto significa que, dado cualquier elemento específico, podemos entonces determinar si pertenece o no al conjunto. Esta característica la especificamos mediante el símbolo ∈, que significa "*es un elemento de*". En caso de que un elemento no pertenezca al conjunto, lo especificamos entonces con el símbolo ∉.

Igualmente, el conjunto A será *igual* al conjunto B, siempre que se cumpla lo siguiente: que todo elemento de A sea un elemento del conjunto B y que todo elemento de B sea un elemento del conjunto A. En este caso {1, 3, 5, 7} = {3, 7, 5, 1}, ya que los dos conjuntos tienen exactamente los mismos elementos. Lo mismo ocurre con {1, 3, 5, 7} = {1, 1, 3, 3, 5, 7}.

Ejemplo

¿Verdadero o Falso?

1. M= {0} entonces n(M)= 1 **Verdadero**
2. R= {4, 5,…, 12, 13} entonces n(R)=10 **Verdadero**
3. $\varnothing$ entonces n($\varnothing$) = 1 **Falso**
4. 3 $\in$ {-3, -1, 5, 9, 13} **Falso**
5. 0 $\in$ {-3, -2, 0, 1, 2,3} **Verdadero**
6. 1/5 $\notin$ {1/3, ¼, 1/6} **Verdadero**
7. 3 = {x | x es un número natural entre 1 y 5} **Falso**

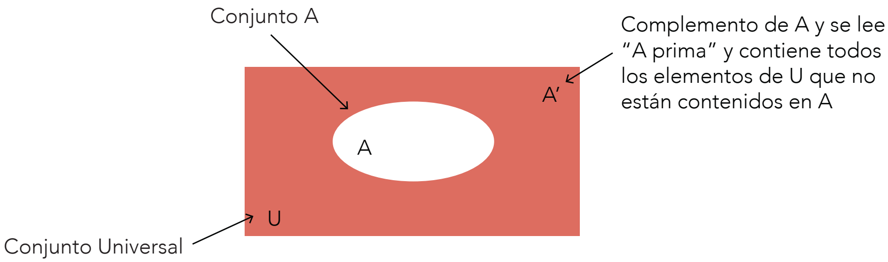
Ejercicio 2: encuentre n(A) de los siguientes conjuntos:

a. A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
b. A = {-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9}
c. A= {2, 4, 6,..., 100}
d. A= {0, 1, 2, 3,..., 3000}
e. A = {a, b, c,..., z}
f. A = el conjunto de los enteros mayores a -21 y menores 21
g. A = {1/2, -1/2, 1/3, -1/3, ..., 1/10, -1/10}

Diagramas de Venn

Los diagramas de Venn son formas gráficas que nos sirven para representar los conjuntos. De esta manera, nos permiten exponer o esclarecer nuestros razonamientos. Cualquier figura geométrica cerrada (círculos, rectángulos, triángulos, óvalos, etc.) sirve para representar gráficamente las operaciones entre conjuntos; estos gráficos son llamados diagramas de Venn.

En la teoría de conjuntos, el universo de discurso se conoce como conjunto universal, el cual se representa mediante la letra ∪. Normalmente, al conjunto universal se le representa con un rectángulo y los conjuntos con un círculo o elipse, tal y como se muestra en la siguiente figura:



En esta figura apreciamos no sólo al conjunto universal ∪, sino que también identificamos al conjunto *A* (elipse blanca) y por deducción podemos decir que el complemento de *A* (*A*') contiene todos los elementos de ∪ que no están contenidos en *A*.

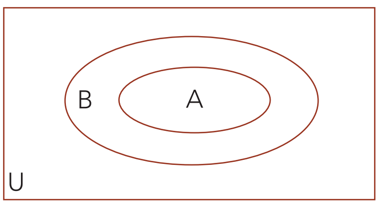
Complemento de un conjunto

Para cualquier conjunto *A* dentro del conjunto universal ∪, el complemento de *A* (*A*') es el conjunto de elementos de ∪ que no son elementos de *A*. En otra notación tenemos:
$A' = \{x | x \in \cup \text{ y } x \notin A\}$

Ejemplo

Dado ∪, M y N, encontrar M' y N'
∪ = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}
M = {a, b, e, f}
N = {b, d, e, g, h}
Entonces:
M' = {c, d, g, h, i, j}
N'={a, c, f, i, j}

Si tenemos dos conjuntos A y B cualesquiera, pero todos los elementos de A están en B, entonces decimos que el conjunto A es *subconjunto* de B y se representa mediante el símbolo ⊆ (A ⊆ B). Gráficamente lo que queremos explicar es lo siguiente:



Otra noción importante, muy utilizada en la teoría de conjuntos, es la de *subconjunto propio*. Esto se refiere a que a intentar encontrar un conjunto que pertenezca a otro, pero que no sean iguales. Esto es, $A \subset B$ y que $A \neq B$.

De este modo, decimos que el número de distintos subconjuntos que puede existir en un conjunto n está dado por 2^n combinaciones de elementos. Y para los subconjuntos propios está dado por 2^n -1 diferentes combinaciones.

Ejemplo
Dado un conjunto A, encuentro los diferentes subconjuntos:
A = {7, 8} = **$\emptyset$, {7}, {8}, {7,8}**
A = {a, b, c} = **$\emptyset$, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}**
Dado un conjunto A, encuentro los diferentes subconjuntos propios:
A = {7,8} = **$\emptyset$, {7}, {8}**
A = {a, b, c} = **$\emptyset$, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}**
Dado un conjunto A, encuentre el número de subconjuntos y subconjuntos propios de cada conjunto:
A = {3, 4, 5, 6, 7} = **2^5 = 32 subconjuntos**
2^5 -1 = 31 subconjuntos propios
A = {1, 2, 3, 4, 5, 9, 12, 14} = **2^8 = 256 subconjuntos**
2^8 -1 = 255 subconjuntos propios

Ejercicio 3:

escoge $\subseteq$ o $\not\subseteq$ para que el resultado sea verdadero:
a. {-2, 0, 2} ______ {-2, -1, 1,2}
b. {2,5} ______ {0, 1, 5, 3, 4, 2}
c. {L, Mi,Vi} ______ {Sa, Ma, J, L, Vi}
d. $\emptyset$ ______{a, b, c, d}
e. $\emptyset$ ______ $\emptyset$

Escoge $\subseteq$ o $\subset$ para que el resultado sea siempre verdadero:
f. {rojo, azul, rosa} ____{rosa, azul, rojo}
g. {9, 1, 7, 3, 5} ____{1, 3, 5, 7, 9}
h. $\emptyset$ ___ $\emptyset$

Operaciones con conjuntos

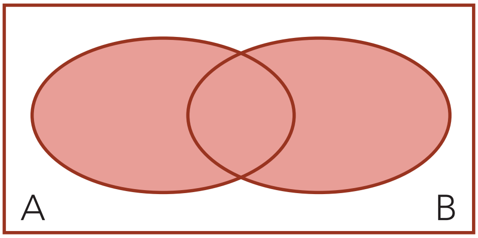
Las operaciones con conjuntos también son conocidas como álgebra de conjuntos y nos permiten realizar operaciones sobre los conjuntos para obtener otro conjunto. En esta sección utilizaremos tanto los diagramas de Venn, como la notación de conjuntos para ejemplificar las operaciones.

La unión

La unión de conjuntos es la operación que nos permite agregar dos o más conjuntos para formar uno sólo que contendrá a todos elementos que queremos unir. Estos elementos no deberán de repetirse. Dado un conjunto A y un conjunto B, la unión de los conjuntos A y B estará formado por todos los elementos de A y todos los elementos de B sin repetir elementos. El símbolo utilizado es $\cup$. De esta forma, la notación de conjuntos es

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

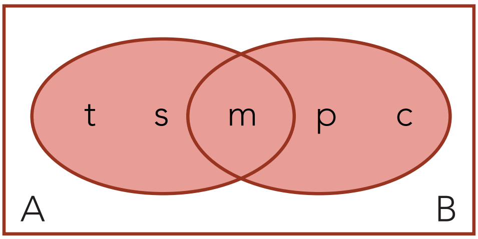
Y el diagrama de Venn asociado a la unión de conjuntos es el siguiente:



Si tenemos dos conjuntos $A = \{m, t, s\}$ y $B = \{m, p, c\}$, entonces la unión de los conjuntos es

$$A \cup B = \{m, t, s\} \cup \{m, p, c\} = \{m, t, s, p, c\}$$

Y gráficamente tendríamos:



Algunas propiedades que se generan a partir de la unión de conjuntos y que fácilmente deduciríamos son las siguientes:

$$A \cup A = A$$
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cup \varnothing = A$$
$$\text{Si } A \subseteq B \text{, entonces } A \cup B = B.$$

Ejemplo

Determine $A \cup B$ de los siguientes conjuntos

A= {2, 4, 6, 8}, B= {2, 4, 6, 8, 10, 12} = **{2, 4, 6, 8, 10, 12}**

A = {a, b, d ,f, g, h, z, y}, B = {c, f, g, h, k} = **{a, b, c, d, f, g, h, k, z, y}**

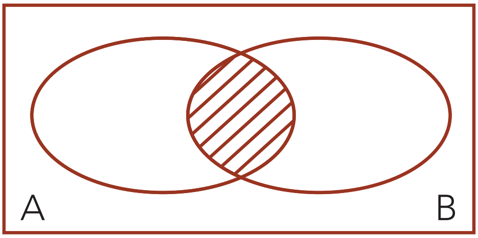
A = {3, 5, 7, 9, 11, 13}, B = $\varnothing$ = **{3, 5, 7, 9, 11, 13}**

La intersección

La intersección de conjuntos es la operación que nos permite formar un conjunto únicamente con los elementos comunes involucrados en la operación; es decir, dado dos conjuntos A y B, la intersección de los conjuntos estará formado por los elementos de A y los elementos que se repitan. Los elementos no comunes o que no se repitan deberán de ser excluidos del conjunto final. El símbolo utilizado para esta representación de la intersección es $\cap$. De esta forma, la notación de conjuntos es

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

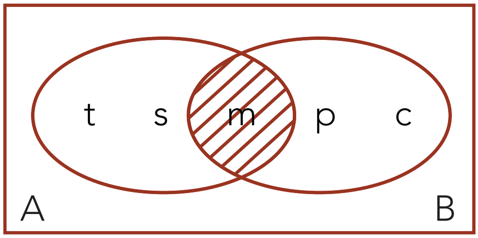
Y el diagrama de Venn asociado a la unión de conjuntos es el siguiente:



Si tenemos dos conjuntos A = {m,t,s} y B = {m,p,c}, entonces la intersección de los conjuntos es:

$$A \cap B = \{m, t, s\} \cap \{m,p,c\} = \{m\}$$

Y gráficamente tendríamos:



Al igual que con la operación de unión, algunas propiedades que se generan a partir de la intersección de conjuntos y que fácilmente deduciríamos son las siguientes:

$$A \cap A = A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$
$$\text{Si } A \subseteq B, \text{ entonces } A \cap B = A.$$

Ejemplo

Determine $A \cap B$ de los siguientes conjuntos:

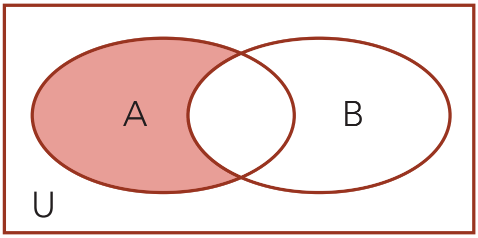
$A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\} = \mathbf{\{4, 6\}}$
$A = \{9, 14, 25, 30\}$, $B \{10, 17, 19, 38, 52\} = \boldsymbol{\varnothing}$
$A = \{3, 5, 7\}$, $B = \varnothing = \boldsymbol{\varnothing}$

La diferencia

La diferencia de conjuntos es la operación que nos permite construir o formar un conjunto, donde el resultado es el que tendrá todos los elementos que pertenecen al primero, pero no al segundo. Es decir, que dados dos conjuntos A y B, la diferencia estará formada por todos los elementos de A que no aparezcan en B. El símbolo que utilizaremos para esta operación es el mismo que se utiliza para la resta o sustracción: -. De esta forma, la notación de conjuntos es

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

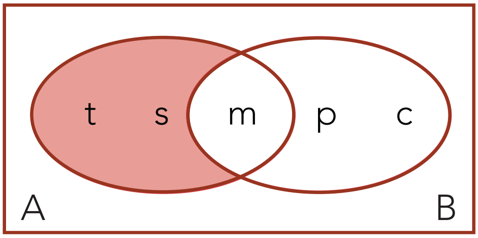
Y el diagrama de Venn asociado a la diferencia de conjuntos es el que se indica:



Si tenemos dos conjuntos $A = \{m, t, s\}$ y $B = \{m, p, c\}$, entonces la diferencia de los conjuntos es:

$$A - B = \{m, t, s\} - \{m, p, c\} = \{t, s\}$$

Y gráficamente tendríamos:



Algunas propiedades que se generan a partir de la diferencia de conjuntos y que fácilmente deduciríamos son las siguientes:

$$A - A = \varnothing$$
$$A - B = A \cap B'$$
$$A - (A - B) = A \cap B$$
$$A \cap (B\text{-}C) = (A \cap B)\text{-}(A \cap C)$$
$$\text{Si } A \subset B, \text{ entonces } A - B = \varnothing.$$

Ejemplo

Determine A - B de los siguientes conjuntos:

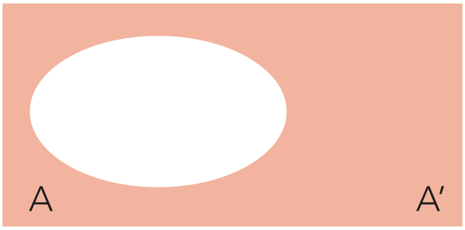
$A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$ = **{3, 5, 7}**
$A = \{9, 14, 25, 30\}$, $B \{10, 17, 19, 38, 52\}$ = **{9, 14, 25, 30}**
$A = \{3, 5, 7\}$, $B = \varnothing$ = **{3, 5, 7}**

El complemento

El complemento de un conjunto es la operación que nos permite formar un conjunto con todos los elementos del conjunto Universal que no están en el conjunto; es decir, dado un conjunto A que está incluido en el Universal, entonces el conjunto complemento de A es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto Universal, pero sin considerar a los elementos que pertenezcan al conjunto A. En esta operación, el complemento de un conjunto lo denotaremos con un apóstrofe (') sobre el conjunto en cuestión al cual se hace la operación de complemento. De esta forma, la notación de conjuntos es la que se indica enseguida:

$$A' = \{x \mid x \in \cup \text{ y } x \notin A\}.$$

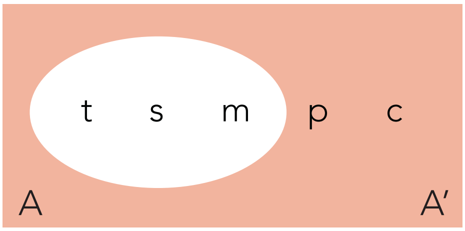
Y el diagrama de Venn asociado a la diferencia de conjuntos es el siguiente:



Si tenemos el conjunto A = {m, t, s} y U = {t, s, m, p, c}, entonces el complemento de A sería:

$$A' = \{t, s, m, p, c\}\text{-}\{m, t, s\} = \{p, c\}$$

Y gráficamente tendríamos:



Algunas propiedades que se generan a partir del complemento de un conjunto y que fácilmente podríamos deducir son las siguientes:

$$U' = \varnothing$$
$$\varnothing' = \cup$$
$$(A')' = A$$
$$A \cup A' = \cup$$

$$A \cap A' = \varnothing$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' = A' \cap B'.$$

Ejemplo

Determine A' dado los siguientes conjuntos:

A = {3, 4, 5, 6, 7}, U = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 10} = **{8, 10}**
A = {9, 14, 25, 30}, U ={9, 14, 25, 30} = $\varnothing$
A = $\varnothing$ $\cup$ = {3, 5, 7} = **{3, 5, 7}**

Ejercicio 4: sean los siguientes conjuntos

$\cup$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10}
A = {1, 2, 4}
B = {2, 4, 6, 9}
C = {1, 3, 6, 9}

Determine:

a. $A' \cap B$
b. $B' \cup C'$
c. $A \cap (B \cup C')$
d. $(A' \cup C') \cap B'$
e. A-B
f. B-A
g. $(A - B) \cup C'$.

Cuando enumeramos o describimos un conjunto que tiene varios elementos, el orden en que aparecen es irrelevante (es lo que hemos hecho hasta ahora). Por ejemplo, {3, 4} es lo mismo que {4, 3}. Sin embargo, existen muchos ejemplos en matemáticas en los que el orden sí importa. Esto genera el concepto de *par ordenado*. Para señalar que este par debe ser ordenado lo señalamos con paréntesis ( ).

Pares ordenados

En un par ordenado (a, b), a se denomina primer componente y b segundo componente. Entonces:

$$(a, b) \neq (b, a)$$

Además, un conjunto puede contener pares ordenados como elementos. Si A y B son conjuntos, entonces cada elemento de A puede ser pareado con un elemento de B, y los resultados se escribirían como pares ordenados. El conjunto que tiene dichos pares se le denomina *producto cartesiano* de A y B, lo cual se escribe $A \times B$.

Producto cartesiano

El producto cartesiano de los conjuntos A y B, simbolizado como $A \times B$, está definido de la siguiente manera:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Ejemplo

Determine si el siguiente enunciado es verdadero o falso:

a. $(4, 10) = (2+2, 12-2)$ **Verdadero**
b. $\{5, 8\} = \{8, 5\}$ **Verdadero** (ya que son conjuntos y no pares ordenados)
c. $(5, 8) = (8, 5)$ **Falso**.

Sea $A = \{2, 5, 9\}$ y $B = \{6, 7\}$, encuentre todos los elementos de los siguientes conjuntos:

d. $A \times B = \{(2, 6), (2, 7), (5, 6), (5, 7), (9, 6), (9, 7)\}$
e. $B \times A = \{(6, 2), (7, 2), (6, 5), (7, 5), (6, 9), (7, 9)\}$
f. $B \times B = \{(6,6), (6,7),(7,6),(7,7)\}$

Existen igualmente unas propiedades que ya mencionamos antes, propias de cada operación de conjuntos, las cuales sintetizamos en el cuadro siguiente:

Propiedad	***Unión***	***Intersección***
Idem potencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Complemento	$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \varnothing$

Adicionalmente, mencionaremos dos propiedades muy interesantes que mezclan las operaciones de unión, intersección y complemento, las cuales nos ayudan a simplificar operaciones específicas.

Estas propiedades son las llamadas *leyes de Morgan* y se definen a continuación:

Leyes de Morgan

Para cualquiera de los conjuntos A, B, se cumple que:

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \text{ y}$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Actividad integradora

Ejercicio 5: teniendo

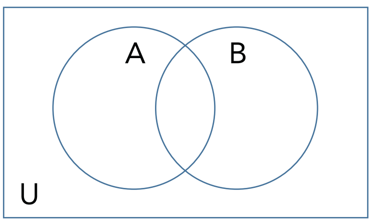
$\cup = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7\}$
$X = \{1, 3, 5, 7\}$
$Y = \{1, 2, 3\}$
$Z = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Determine:

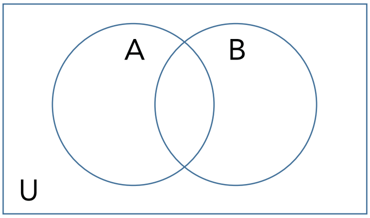
a. $X \cap Y$
b. $Y \cup Z'$
c. $X \cup U$
d. X'
e. $X' \cap Y'$
f. $X \cup (Y \cap Z)$
g. $(Y \cap Z') \cup X$
h. $(Z \cup X')' \cap Y$
i. $X - Y$
j. $X' - Y$
k. $X \cap (X - Y)$.

Ejercicio 6: selecciona o sombrea el área que corresponda al siguiente conjunto:

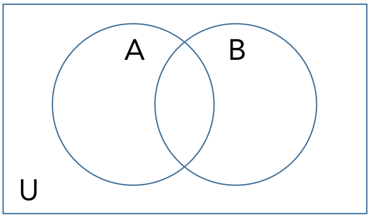
a. $A' \cap B$



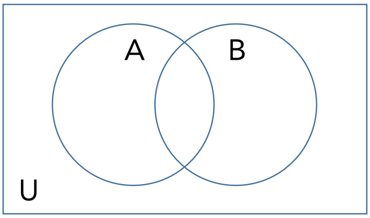
b. A’ ∪ B’



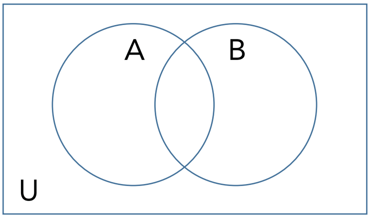
c. (A ∩ B)’



d. A’ ∪ B’

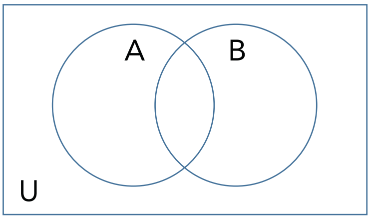


e. (A’ ∩ B’) ∩ C

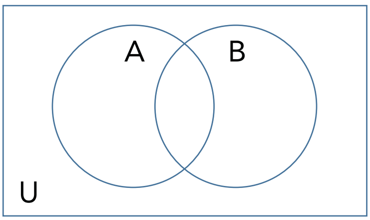


Ejercicio 7: coloque los elementos en la posición correcta dentro del diagrama de Venn:

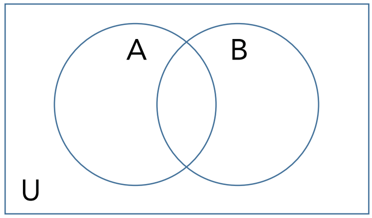
a. Sean
U = {q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}
A = {r, s, t, u, v}
B = {t, v, x}



b. Sean
U = {a, b, c, d, e, f, g}
A = {b, d, f, g}
B = {a, b, d, e, g}



c. Sean
U = {m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w}
A = {m, n, p, q, r, t}
B = {m, o, p, q, s, u}
C = {m, o, p, r, s, t, u, v}



La teoría de conjuntos es de gran utilidad en las matemáticas, ya que es una herramienta importante para estudiar las relaciones existentes entre un todo (conjunto universal) y las partes que lo componen (subconjuntos) . Además, es una herramienta que nos permite simplificar definiciones y elementos que eran muy complejos de abordar desde otras ramas de las matemáticas.

La teoría de conjunto, junto con la lógica (que se examinará en el capítulo siguiente) son muy interesantes para construir el resto de objetos y estructuras de interés en matemáticas: números, funciones, figuras geométricas, entre otros.

Para mayor información

Carlos Ivorra Castillo (2016a; 2016b).

Introducción a la lógica

La lógica es un modelo incompleto de la causalidad.
Gregory Bateson

Objetivo general

Entender la lógica simbólica a partir del uso de proposiciones simples y compuestas.

Objetivos particulares

- Reconocer las distintas alternativas de interpretación de los cuantificadores.
- Entender el uso de los valores de verdad de los componentes de las proposiciones para encontrar los valores de verdad de las proposiciones compuestas.
- Entender y aplicar lo que es una conjunción a proposiciones compuestas.
- Entender y aplicar lo que es una disyunción a proposiciones compuestas.
- Entender la condicional y la bicondicional dentro de las proposiciones.
- Aplicar la tabla de verdad como método para identificar si un argumento es válido o no.

La lógica es una disciplina filosófica que estudia la estructura o formas de pensamiento, con el fin de establecer razonamientos o argumentos válidos o correctamente lógicos. Sin embargo, Fingermann[1] (1977: 10) afirma que es “la ciencia de las leyes y de las formas del pensamiento, que nos da normas para la investigación científica y nos suministra un criterio de verdad”. Sin embargo, la lógica no solamente incide en un conocimiento especializado, como la Filosofía; sino que, además, la lógica es un instrumento para nuestra vida diaria, pues nos permite razonar, reflexionar y obtener conclusiones para la toma de decisiones. No existe una única definición de la lógica y la historia nos muestra que numerosos personajes reflexionaron acerca de lo que es. Entre las definiciones de lógica nos encontramos con estas tres más relevantes:

1. Gregorio Fingermann, Lógica y teoría del conocimiento, México, El Ateneo, 1977, p. 10.

- "La lógica es la ciencia de las leyes necesarias del entendimiento y de la razón" (Kant).
- "La lógica es la ciencia de la demostración, pues sólo se preocupa de formular reglas para alcanzar verdades a través de la demostración" (Aristóteles).
- "La lógica es la ciencia de la idea pura de la idea en el elemento abstracto del pensamiento" (Hegel).

La lógica es base fundamental de las matemáticas, a partir de la cual se establecen principios fundamentales para distinguir el razonamiento correcto del incorrecto. A partir del siglo XIX, Georg Cantor y su teoría de conjuntos dio paso a una lógica simbólica, en la que los símbolos son parte fundamental para la representación de proposiciones.

Proposición

Una proposición es una aseveración que emite un juicio o valor de las cosas y que puede ser falsa o verdadera, pero no ambas.

En este tercer capítulo introduciremos al alumno al uso de proposiciones simples y compuestas. A medida que el alumno avanza en su aprendizaje, se percata de que en la cotidianeidad utiliza el razonamiento matemático para llegar a conjeturas y conclusiones.

Se utiliza la tabla de verdad como elemento indispensable para verificar el valor de verdad o falsedad de una proposición. Se muestran paso a paso algunos ejemplos, así como el razonamiento de los alumnos para resolver problemas sencillos.

Proposiciones simples

Una proposición es una idea que se expone, en la que se comprueba si aquélla es verdadera o falsa. Ejemplo: Roberto sacó una MB en la clase de pensamiento matemático.

Existen conjuntos de ideas que no son comprobables, a esto se le llama una no proposición. Ejemplo: ¿cuánto se retardará el autobús?

Las proposiciones pueden ser simples o compuestas. Algunos ejemplos de proposiciones simples son

- Hoy va a llover.
- En la UAM Cuajimalpa se aprende mucho.

- Mañana voy a ir al cine.
- La clase de Introducción al Pensamiento Matemático es divertida.
- La lógica es fácil de entender.
- El correo electrónico constituye un medio de comunicación.
- $2 + 7 = 10$.

Al analizar las proposiciones simples anteriores diremos si son verdaderas o falsas, con base en lo que sabemos y, como ya se dijo, no pueden ser verdaderas y falsas al mismo tiempo.

Actividad integradora

Ejercicio 1: ¿cuál es la negación de la proposición "Carmen tiene un coche rojo"?

La negación

La negación de una proposición verdadera es falsa; y de una falsa, verdadera.

Ejercicio 2: construir las negaciones de las siguientes proposiciones:

- El Estado de Puebla tiene un gobernador.
- El Sol no es una estrella.

Para simplificar el manejo de la lógica se usan símbolos. Las proposiciones se representan con letras (p, q, r), mientras que los conectivos lógicos utilizan símbolos.

Conectivo	*Símbolo*	*Tipo de proposición*
y	$\wedge$	Conjunción
o	$\vee$	Disyunción
no	$\neg$	Negación

Ejercicio 3: si tenemos "Enrique Peña Nieto será presidente hasta el año 2016", entonces:

¿$\neg$p sería?

Ejercicio 4: sea *p* que representa “Hoy estamos a 18°C” y *q* “Hoy es martes”. Transcribe cada proposición simbólica en palabras:

a. $p \vee q$
b. $p \wedge q$
c. $\neg(p \vee q)$
d. $\neg(p \wedge q)$

Ejercicio 5: determina si es o no una proposición simple:

a. El 22 de septiembre de 2014 fue domingo.
b. 5 + 8 = 13 y 4-3 =2.
c. ¿Adónde irás hoy?
d. Los accidentes en auto son la principal causa de muerte en los niños menores de 8 años.
e. Algunos números son negativos.

Cuantificadores

El concepto de “cuantificador” permite indicar la cantidad de una cosa. Los cuantificadores se utilizan para indicar cuántos casos existen de una situación determinada. Existen cuantificadores universales y universales:

- Cuantificadores universales: todo, cada uno, todos y ninguno.
- Cuantificadores existenciales: hay, al menos uno, etc.

Cuando se trata de definir cada uno de los cuantificadores, los alumnos coinciden en las siguientes interpretaciones:

- Todos: cada uno de los elementos de una clase.
- Sólo algunos: parte de los elementos de una clase.
- Ninguno: ni uno solo de los elementos de una clase.

Ejemplo

A partir de la proposición “Todas las mujeres del grupo se llaman Sofía”, ¿cómo se escribe su proposición negativa?

Solución paso a paso

1. Vamos a crear diferentes casos, formando un grupo para cada una de las alternativas:

- Grupo 1: Sofía González, Sofía Sánchez, Sofía López.
- Grupo 2: Sofía Gutiérrez, Carla Gómez, Ana Solís.
- Grupo 3: Clara Méndez, Raquel Martínez, Rosario Hernández.

2. Analizando el primer grupo, tenemos que todas las mujeres se llaman Sofía.
3. Analizando el segundo grupo, una se llama Sofía y las otras no, por lo que podemos decir que algunas se llaman Sofía.
4. Finalmente, analizando el tercer grupo, ninguna se llama Sofía.
5. Tomando en cuenta cada uno de los casos, vamos a crear una tabla de verdad para analizarlos:

	G1	*G2*	*G3*
1) Todas las mujeres del grupo se llaman Sofía (proposición)			
2) Ninguna mujer del grupo se llama Sofía (posible negación)			
3) Todas las mujeres del grupo no se llaman Sofía (posible negación)			
4) Algunas mujeres del grupo no se llaman Sofía (posible negación)			

6. Cada uno de los casos se deben responder escribiendo V o F, en caso de que ocurran en los diferentes grupos:

	G1	*G2*	*G3*
1) Todas las mujeres del grupo se llaman Sofía (proposición)	V	F	F
2) Ninguna mujer del grupo se llama Sofía (posible negación)	F	F	V
3) Todas las mujeres del grupo no se llaman Sofía (posible negación)	F	F	V
4) Algunas mujeres del grupo no se llaman Sofía (posible negación)	F	V	V

7. Al analizar el cuadro se observa que para la proposición inicial "Todas las mujeres del grupo se llaman Sofía" se tiene para los grupos V, F y F. Ahora, debemos buscar sus valores opuestos en todos los casos. Si se observa la tabla, los valores opuestos corresponden a la cuarta opción: "Algunas mujeres del grupo no se llaman Sofía". Por lo tanto, ésta es la negación a la primera proposición.

	G1	*G2*	*G3*
1) Todas las mujeres del grupo se llaman Sofía (proposición)	**V**	**F**	**F**
2) Ninguna mujer del grupo se llama Sofía (posible negación)	F	F	V
3) Todas las mujeres del grupo no se llaman Sofía (posible negación)	F	F	V
4) Algunas mujeres del grupo no se llaman Sofía (posible negación)	**F**	**V**	**V**

Opuestos

La negación de proposiciones con cuantificadores se resumiría como se indica:

Proposición	*Negación*
Todos cumplen	Algunos no cumplen (no todos cumplen)
Algunos cumplen	Ninguno cumple

Actividad integradora

Ejercicio 6: selecciona la negación para cada proposición dada:

a. Algunos gatos tienen pulgas.
b. Algunos gatos no tienen pulgas.
c. Ningún gato tiene pulgas.

Cuando nos referimos a ningún, hablamos de que no hay gatos que tengan pulgas, entonces, con que sólo exista un gato o algunos, ya estamos negando dicha afirmación, por lo cual no es necesario decir que todos los gatos no tienen pulgas.

Ejercicio 7: escribe la diferencia que existe entre las siguientes proposiciones:

a. Todos los alumnos no aprobaron el examen.
b. No todos los alumnos aprobaron el examen.

Proposiciones compuestas

Una de las principales aplicaciones de la lógica es el estudio del *valor de verdad* (la veracidad o falsedad) de proposiciones que están compuestas de diversos elementos. Una proposición compuesta está formada por dos proposiciones unidas mediante conectores lógicos como "y" u "o" (en forma de símbolos). Algunos ejemplos de proposiciones compuestas son

- Hoy voy a ir al cine o voy a ir a la UAM-C.
- Hace mucho frío y no tengo ganas de salir.
- La clase de Pensamiento Matemático es divertida y el profesor es amable.
- Puedes pagarme ahora o pagarme después.

Como se aprecia en los ejemplos anteriores, las proposiciones compuestas unen dos frases. Un ejemplo de proposición que no es compuesta es

- La clase es impartida por Paco y Luis. (Explicación: en este caso Paco y Luis forman parte de la misma idea).

Actividad integradora

Ejercicio 8: determina si es o no una proposición compuesta:

a. Leo *El Universal* y escribo en *La Jornada*.
b. Mañana será domingo.
c. Si Juan saca MB, entonces su mamá estará contenta.
d. A la novia de Roberto le gustan las nieves de La Michoacana.

La conjunción

Una conjunción es la unión de una o más cosas y se representa con el símbolo:

$$\boxed{\wedge}$$

Ejemplo

El invierno sigue inmediatamente después del otoño y el verano es la estación que sigue inmediatamente a la primavera.

El ejemplo precedente está compuesto por dos proposiciones unidas por una conjunción (y). La primera proposición "El invierno sigue inmediatamente después del otoño" es verdadera, al igual que lo es la segunda proposición "El verano es la estación que sigue inmediatamente a la primavera". En este ejemplo, toda la proposición es verdadera.

Ejemplo

El invierno sigue inmediatamente después del otoño y el verano es la estación que sigue inmediatamente al invierno.

El ejemplo previo está compuesto por dos proposiciones, donde la primera "El invierno sigue inmediatamente después del otoño" es verdadera, pero la segunda, "El verano es la estación que sigue inmediatamente al invierno", es falsa. Por lo tanto, en este ejemplo toda la proposición es falsa.

Tabla de verdad $\wedge$

¿Cómo identificar si una proposición formada por una conjunción es verdadera o falsa? Para que la conjunción $p \wedge q$ sea verdadera: ambas proposiciones p y q deben ser verdaderas.

Tabla de verdad para $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La disyunción

Una disyunción es la desunión o separación de una o más cosas. Implica la idea de cualquiera. Se representa al unir dos proposiciones con una letra *o*. Utilizando un símbolo se usa:

$\vee$

Ejemplo

Me como un pastel o una ensalada.

En el ejemplo anterior, al utilizar una disyunción, es decir, dos frases unidas por un conector lógico "o", significa que sólo una de las dos posibilidades puede ocurrir. Si me como un pastel, ya no comeré una ensalada y viceversa. Sin embargo, tal vez tengo mucha hambre y puedo comer ambas cosas. Por lo tanto, una disyunción es verdadera cuando al menos una de las dos proposiciones es verdadera.

De igual forma, es verdadera si ambas proposiciones son verdaderas. Esto significa que con que una lo sea, ya no es necesario verificar la veracidad de la otra.

Tabla de verdad $\vee$

¿Cómo identificar si una proposición formada por una disyunción es verdadera o falsa? Para que la disyunción $p \vee q$ sea verdadera: al menos una de las dos proposiciones debe ser verdadera.

Tabla de verdad para $p \vee q$

p	*q*	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La negación

La negación de una proposición tendrá como resultado su valor contrario. $\neg p$ tiene el valor opuesto a p.

$\neg$

Ejemplo

¬ Voy a ir al cine.

En el ejemplo "¬voy a ir al cine" estamos negando "voy a ir al cine", por lo tanto, si la proposición era verdadera, su resultado al negarla será negativo y viceversa.

Tabla de verdad para ¬p

p	$\neg p$
V	F
F	V

Ejemplo

Suponiendo que p es falsa y q es verdadera, encontrar cuál es el valor de verdad para: $\neg p \wedge (\neg p \wedge q)$

Solución paso a paso

1. Construir la tabla de verdad para la proposición compuesta dada:

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge (\neg p \wedge q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

2. Escribir cada uno de los valores en las celdas correspondientes, verificando la tabla de verdad para la conjunción, la disyunción y la negación:

1	2	3	4	5
p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge (\neg p \wedge q)$
V	V	F		
V	F	F		
F	V	V		
F	F	V		

De acuerdo con la tabla de verdad de la negación se tiene que si p es verdadero ¬p es falso. Por lo tanto, escribimos F aquí, verificando los valores de la columna 1 y escribiendo su contrario en la columna 3.

3. Para verificar la cuarta columna, se tiene ¬ p ∧ q, por lo que se debe utilizar la tabla de la conjunción. **En la tercera columna ya se tienen los valores de ¬ p**, así que se tomarán esos para formar una proposición con los valores de q de la segunda columna:

1	2	3	4	5
p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge (\neg p \wedge q)$
V	V	F	F	
V	F	F	F	
F	V	V	V	
F	F	V	F	

4. Para contestar la proposición compuesta es necesario usar los resultados de la tercera y cuarta columnas. Cabe recordar la tabla de verdad de la conjunción, la cual indica que es verdadero cuando ambos valores son verdaderos, de lo contrario es falso.

1	2	3	4	5
p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge (\neg p \wedge q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

Para contestar la columna 5, se toman los valores de la 3 y 4. Para el primer caso, tenemos F y F, por lo tanto, nuestro resultado es F.

5. Como se observa en la figura anterior, la columna 5 sólo muestra valores verdaderos, cuando tanto la columna 3 como la 4 tienen también ambos verdaderos. Para contestar: "suponiendo que p es falsa y q es verdadera encontrar cuál es el valor de verdad para ¬ p ∧ (¬ p ∧ q)" es necesario buscar en la tabla de verdad la fila en la que p tiene F y q tiene V. La fila correspondiente es la 3

y para encontrar el resultado hay que ver qué valor tiene la columna final. El resultado es verdadero (V).

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge (\neg p \wedge q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

El resultado es Verdadero.

Proposiciones equivalentes

Una aplicación de las tablas de verdad consiste en mostrar que dos proposiciones son *equivalentes* si tienen el mismo valor de verdad en todas las situaciones posibles.

Ejemplo

¿Son equivalentes las proposiciones $\neg p \wedge \neg q$ y $\neg (p \vee q)$?

Solución paso a paso

1. Para cada proposición, construir su tabla de verdad.
2. La tabla de verdad de $\neg p \wedge \neg q$ debe comenzarse con los valores de p y q, para después utilizar la tabla de verdad de la negación. Queda así:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

3. La tabla de verdad de $\neg (p \vee q)$ implica contestar la disyunción de $(p \vee q)$, la cual indica que una conjunción es verdadera si al menos uno de sus valores es verdadero. Después, es necesario cambiar sus valores utilizando la negación. Siguiendo esta primera forma, la tabla de verdad queda así:

p	q	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

4. Para saber si las proposiciones son equivalentes $\neg p \wedge \neg q$ y $\neg(p \vee q)$, es suficiente con comparar el resultado de la última columna de ambas tablas de verdad.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

p	q	$(p \vee q)$	$\neg (p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

La última columna de ambas tablas tiene los mismos valores de verdad para todos los casos, por lo que son equivalentes.

A estas equivalencias se les llama leyes de Morgan. Para cualesquiera proposiciones p y q,

$$\neg (p \vee q) \cong \neg p \wedge \neg q$$

y

$$\neg (p \wedge q) \cong \neg p \vee \neg q$$

El símbolo $\cong$ significa equivalente. Las leyes de Morgan permiten sustituir un valor por su contrario cuando está precedido por el símbolo de negación ($\neg$).

Ejemplo

Usando las leyes de Morgan, encontrar la negación para la siguiente proposición:

Yo obtuve una MB o yo obtuve una B.

Solución paso a paso

1. La proposición compuesta "Yo obtuve una MB o yo obtuve una B", está formada por las proposiciones unidas por la letra o (disyunción). Separando cada proposición y asignándoles un símbolo nos queda:

   Yo obtuve una MB o yo obtuve una B

   p q

2. Sustituyendo la letra *o* por $\vee$ nos queda: $p \vee q$
3. Asignando una negación a la proposición obtenemos: $\neg(p \vee q)$.
4. Tomando en cuenta las leyes de Morgan, sabemos que $\neg(p \vee q) \cong \neg p \wedge \neg q$.
5. Sustituyendo las frases iniciales de la proposición compuesta, tenemos que:

   $\neg p \wedge \neg q$ significa que NO obtuve una MB y NO obtuve una B.

Ejemplo

Usando las leyes de Morgan, encontrar la negación para la siguiente proposición:

Yo no obtuve una MB y yo no obtuve una B.

Solución paso a paso

1. La proposición compuesta "Yo no obtuve una MB y yo no obtuve una B" está formada por las proposiciones unidas por la letra y (conjunción). Separando cada proposición y asignándoles un símbolo nos queda:

   Yo no obtuve una MB y yo no obtuve una B

   p q

2. Sustituyendo la letra o por $\vee$nos queda: $p \wedge q$
3. Asignando una negación a la proposición obtenemos: $\neg (p \wedge q)$.
4. Tomando en cuenta las leyes de Morgan, sabemos que $\neg (p \wedge q) \cong \neg p \vee \neg q$.
5. Sustituyendo las frases iniciales de la proposición compuesta tenemos que:

   $\neg p \vee \neg q$ significa que obtuve una MB u obtuve una B.

Ejemplo

Sea que p representa una proposición falsa y q una verdadera. Encuentra el valor de verdad para: $\neg(p \wedge \neg q)$.

Solución paso a paso

Paso 1: es necesario sustituir cada símbolo por su valor y desarrollar; por lo tanto, el desarrollo es el siguiente para $\neg(p \wedge \neg q)$ obtenemos $\neg (F \wedge \neg V)$.
Paso 2: aplicando las leyes de Morgan nos queda: $V \vee V$.
Paso 3: utilizando la tabla de verdad de la disyunción nos da verdadero.

Ejemplo

Sea que p representa una proposición verdadera y q y r proposiciones falsas. Encuentra el valor de verdad para la proposición compuesta: $p \wedge (q \vee r)$.

Solución paso a paso

Paso 1: sustituir los valores inicialmente dados en p, q y r en la proposición dada. Nos queda: $V \wedge (F \vee F)$
Paso 2: para solucionar $V \wedge (F \vee F)$, debemos aplicar las tablas de verdad a las proposiciones que se encuentran entre paréntesis. Aplicando a $(F \vee F)$ la disyunción, obtenemos que dos valores falsos dan falso. Sustituimos F en $(F \vee F)$ y nos queda: $(V \wedge (F))$.
Paso 3: para solucionar $V \wedge (F)$ debemos aplicar la tabla de verdad de la conjunción, que nos indica que sólo dos valores verdaderos dan verdadero. En este caso, tenemos verdadero y falso, por lo que nuestro resultado es falso.

Actividad integradora

Ejercicio 9: sea que p representa una proposición falsa y q una verdadera. Encuentra el valor de verdad para: $\neg p$

Ejercicio 10: ¿la proposición $8 \geq 5$ es una conjunción o una disyunción? ¿Por qué?

Ejercicio 11: elabora una tabla de verdad para la siguiente proposición: $(q \vee \neg p) \vee \neg q$.

Los alumnos lo explican

Para la siguiente proposición desarrolla la tabla de verdad:

$$\neg [(p \vee q) \vee (\neg q \wedge p)] \wedge \neg q$$

Solución:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg q \wedge p$	$(p \vee q) \vee (\neg q \wedge p)$	$\neg [(p \vee q) \vee (\neg q \wedge p)]$
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	F	V	V	V	V	F
F	V	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F	F	V

$\neg [(p \vee q) \vee (\neg q \wedge p)] \wedge \neg q$
F
F
F
V

Respuestas y razonamiento

1. "Primero realizar la tabla de $p \vee q$
2. Después realizar el negativo de $\neg q$ para resolver la siguiente proposición $\neg q \wedge p$.
3. Procedemos a resolver la tabla dentro del corchete $[(p \vee q) \vee (\neg q \wedge p)]$.

4. Y, por último, aplicar el negativo de la tabla del corchete y proceder a resolver toda la proposición $\neg [(p \vee q) \vee (\neg q \wedge p)] \wedge \neg q$"

Irving Ulises Velázquez Durán,
Licenciatura en Tecnologías y Sistemas de Información

1. "Realicé la tabla correspondiente para cada caso, identificando cada uno de los componentes que la conforman y la cantidad de proposiciones en ella.
2. Lo fui desglosando de adentro hacia fuera como cualquier operación matemática y resolviendo para las negativas de cada sección.
3. Puse una columna para cada caso, y con base en eso, fui resolviendo hasta llegar a la proposición final que se pide".

Stephanie Pereyra Meneses,
Licenciatura en Diseño

1. "Primero escribí los valores de p y q, al igual que sus negativos $\neg p$ y $\neg q$. Después en base a esos valores escribí los valores de cada parte de la proposición.
2. Primero escribí $(p \vee q)$ pero como vi que el corchete lo convertía en negativo lo cambié a $\neg(p \vee q)$. Hice lo mismo con la otra parte $(\neg q \wedge p)$. Ya acabando esas primeras dos proposiciones simples hice la compuesta $\neg [(p \vee q) \vee (\neg q \wedge p)]$, recordando que para sacar todo esto hay que notar también el conector si es conjunción $\wedge$ disyunción $\vee$.
3. Al último ya teniendo todos los valores de la proposición se juntan y se saca los valores finales para $\neg [(p \vee q) \vee (\neg q \wedge p)] \wedge \neg q$".

André Morales Hernández,
Licenciatura en Ciencias de la Comunicación

Solución alternativa: otra forma de resolverlo

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$q \vee \neg p$	$(\neg p \wedge \neg q) \wedge (q \vee \neg p)$
V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V

$[(\neg p \wedge \neg q) \wedge (q \vee \neg p)] \wedge \neg q$
F
F
F
V

Respuestas y razonamiento

"Nota: es importante respetar la jerarquía de signos

1. Negué las proposiciones dentro de los paréntesis, ya que tenía un signo ¬ fuera de éste, al negar cambié los valores de p y q, así como los signos.
2. Asigné los posibles valores a p y q en la tabla.
3. Agregué las negaciones de p y q.
4. Hice la disyunción de ¬p y ¬q, basándome en la tabla de verdad de la disyunción, donde la proposición es verdadera si ambos elementos son verdaderos.
5. Siguiendo con el orden de la proposición, hice la conjunción de (q∨¬p), aquí la afirmación es verdadera si sólo una de ellas es verdadera. Los valores son obtenidos de las columnas 2 y 3.
6. Como ya tenemos los valores para hacer la proposición que está dentro de los paréntesis, procedemos a crear su columna, basándonos en la tabla de verdad de la disyunción .
7. Por último, tenemos nuestra proposición completa haciendo la disyunción entra la última columna realizada y los valores de ¬q".

Mariana Martínez Olmos,
Licenciatura en Ciencias de la Comunicación

1. "Primero realicé la negación de q, pasar todos su valores al contrario. También con p.
2. Después, se aplica la ley de Morgan a ¬ (p ∨q) y a (¬q ∧ p).
3. Ahora el signo de disyunción que une las dos proposiciones cambian a conjunción quedando (¬p ∧¬q) ∧ (q∨¬p).
4. Al final, ya teniendo la primera parte negada totalmente, la uno en conjunción con ¬p y resuelvo".

Omar David Pacheco Mejía,
Licenciatura en Diseño

"Nota: para poder determinar los valores de la proposición, tomamos los valores de la proposición anterior.

1. Como en el álgebra, negamos la proposición dada limitada por los corchetes.
2. Escribimos después cuál sería la proposición con sus negaciones correspondientes.
3. Según las tablas dadas y la proposición comenzamos a calcular los valores de cada proposición limitada por sus paréntesis.
4. Habiendo sacado los valores, procedemos con la disyunción, calculamos, como en el pasado punto, sus valores.
5. Como se menciona en la nota, teniendo los valores de la proposición con corchetes, realizamos la disyunción en la siguiente proposición".

Omar Estrada Aguilar,
Licenciatura en Tecnologías y Sistemas de Información

Los alumnos lo explican

Ejercicio: para la siguiente proposición desarrolla la tabla de verdad $[(q \wedge \neg p) \wedge (q \vee \neg p)] \vee \neg(q \wedge p)$.

Solución

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$q \wedge \neg p$	$q \vee \neg p$	$[(q \wedge \neg p) \wedge (q \vee \neg p)]$
V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F

$\neg(q \wedge p)$	$[(q \wedge \neg p) \wedge (q \vee \neg p)] \vee \neg(q \wedge p)$
F	F
V	V
V	V
V	V

Respuestas y razonamiento

1. "Anotamos los valores posibles para "p" y "q".
2. Como la operación lo requiere, también anotamos los valores posibles para "$\neg p$" y "$\neg q$" que son lo contrario a "p" y "q".
3. Comenzamos resolviendo las operaciones que están entre paréntesis.
4. Resolvemos la operación entre corchetes.
5. Al final vamos a hacer en este caso la disyunción con nuestro resultado de entre corchetes con la que está afuera entre paréntesis".

Eva María Aguilar Castillo,
Licenciatura en Ciencias de la Comunicación

1. "Observamos lo siguiente $[(q \wedge \neg p) \wedge (q \vee \neg p)] \vee \neg (q \wedge p)$.
2. Aplicamos la negación a los paréntesis $\neg q \vee \neg p$.
3. Hacemos una tabla donde se cubran todos los posibles grupos a evaluar.
4. Evaluamos p, q, $\neg p$ y $\neg q$.
5. Evaluamos $q \wedge \neg p$ con los valores que ya tenemos.
6. Evaluamos $q \vee \neg p$ con los valores que ya tenemos.
7. Consideramos a $(q \wedge \neg p)$ como p' y a $(q \vee \neg p)$ como q' para evaluar la proposición $(q \wedge \neg p) \wedge (q \vee \neg p)$ equivalente a $(p' \wedge q')$.
8. Evaluamos el término restantes para luego evaluar toda la proposición $\neg q \vee \neg p$.
9. Consideramos $(p' \wedge q')$ como p" y a $(\neg q \vee \neg p)$ como q" y entonces evaluamos la proposición $(p'' \vee q'')$. Listo".

Luis Gerardo Melo Vázquez,
Licenciatura en Tecnologías y Sistemas de Información

1. "Primero saqué la tabla de p, q, $\neg p$ y $\neg q$.
2. Luego resolví las proposiciones de los paréntesis dentro del corchete, después la proposición del corchete usando los resultados de los paréntesis dentro de éste.
3. Pausé hasta ahí y resolví el paréntesis fuera del corchete y luego negarlo.
4. Por último, contesté la proposición usando los datos ya obtenidos y así llegué a su resultado".

Jesús Hernández Menchaca,
Licenciatura en Diseño

Los alumnos lo explican

Ejercicio: para la siguiente proposición desarrolla la tabla de verdad: $\neg[(p \vee q) \vee (\neg q \wedge \neg p)] \vee q$.

Solución

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg q \wedge \neg p$	$\neg[(p \vee q) \vee (\neg q \wedge \neg p)]$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V

$\neg[(p \vee q) \vee (\neg q \wedge \neg p)] \vee q$
V
V
V
V

Respuestas y razonamiento

1. "Para contestar el ejercicio necesito saber de entrada la simbología: $\vee$ (o), $\wedge$ (y), $\neg$ (negación).
2. Se analiza primero el ejercicio, observo si existe algo que tengo que resolver.
3. En las dos primeras columnas de los ejercicios escribo las primeras cuatro posibles respuestas y después otras dos para sus respectivas negaciones.
4. Resuelvo la negación del corchete, convirtiendo cada símbolo en su negación. Esto es, las leyes de Morgan, pues al resolver estoy obteniendo su equivalente.
5. Proseguimos con la tabla. Paso a paso se va haciendo más completo y contestamos según su simbología, de manera ascendente de adentro y sencillo hacia afuera y más complejo".

Pedro Jacobo López del Campo,
Licenciatura en Ciencias de la Comunicación

1. "Primero noté cuáles eran las partes que me pedían y lo dividí así en la tabla.
2. Recordé que las reglas son "$\vee$ = o", donde siempre va a ser verdad siempre y cuando tenga una verdad.
3. "$\wedge$= y", donde va a haber verdad siempre que las dos sean verdad.
4. Y el "$\neg$" significa negación, o sea lo contrario. Entonces, por ejemplo, si me pedían "p" y su negación, pues ponía otra columna con $\neg$p y así ejecutaba todas".

Ketzali Ameyali Martínez Hernández,
Licenciatura en Tecnologías y Sistemas de Información

1. "En este ejercicio, al haber una negación en un corchete, quiere decir que el resultado de las proposiciones es distinto, es decir, una afirmación se convierte en negación y viceversa; y una conjunción se convierte en disyunción y viceversa.
2. Por lo tanto, primero eliminé el corchete, quedando así sólo paréntesis.
3. Por último, resolví lo que está dentro del paréntesis".

Jonathan Martínez Rojas,
Licenciatura en Diseño

Los alumnos lo explican

Ejercicio: para la siguiente proposición desarrolla la tabla de verdad:

$$[(q \wedge \neg p) \vee (\neg p \vee \neg q)] \wedge \neg (p \wedge q).$$

Solución

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$q \wedge \neg p$	$\neg p \vee \neg q$	$(q \wedge \neg p) \vee (\neg p \vee \neg q)$
V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V

$[(q \wedge \neg p) \vee (\neg p \vee \neg q)] \wedge \neg (p \wedge q)$
V
V
V
V

Respuestas y razonamiento

1. "Primero, puse todas las situaciones de p y q.
2. Segundo, usé las tablas de verdad de $\neg p$ y $\neg q$.
3. Tercero, convertí a negación las proposiciones en el corchete $[\,(q \wedge \neg p) \vee (\neg p \vee \neg q)]$.
4. Cuarto, apliqué las tablas de verdad de la conjunción y la disyunción.
5. Necesité saber que las conjunciones y disyunciones se invierten si se niegan y las leyes de Morgan.

David Arturo Martínez Mateos,
Licenciatura en Diseño.

1. "Separé el conjunto de las aseveraciones, empezando por verdadero y después saqué su negativo.
2. Obteniendo estos resultados fui uniendo poco a poco, comparando los valores de par en par, hasta ir reuniendo más complejos hasta llegar al último nivel".

Hugo Alejandro Márquez Guevara,
Licenciatura en Tecnologías y Sistemas de Información

1. "Seguí el orden de todas las proposiciones, conjunto por conjunto.
2. En la última proposición me di cuenta de que había una proposición equivalente que ya había resuelto.
3. Necesité recordar el valor de los símbolos y cuándo eran verdaderas o falsas".

Lorena Sierra Bautista,
Licenciatura en Ciencias de la Comunicación

Proposiciones condicionales

Una condicional depende de una o más condiciones o requisitos. Por ejemplo, "si estudias, sacarás MB". En el ejemplo anterior, el alumno sacará MB si estudia.

Proposición condicional

Una proposición condicional está formada por el conectivo si … entonces. Aunque la proposición condicional no indique el si … entonces, puede transformarse usándolo.

Para el ejemplo "si estudias, sacarás MB", es lo mismo que decir "si estudias entonces sacarás MB". En este último caso, se ha utilizado si … entonces para mostrar que es una proposición sujeta a una condición.

Cuando se utiliza si .. entonces, podemos decir que después del SI hay una CONDICIÓN, mediante la cual lo que sigue después de ENTONCES será verdadero. Se representa como:

$$\boxed{p \rightarrow q}$$

Una proposición condicional está formada por un antecedente (o hipótesis) y un consecuente (conclusión). Sin embargo, no siempre es explícito como los ejemplos siguientes:

a. Las niñas grandes no lloran.
b. Es difícil estudiar cuando no se pone atención en clase.

En los ejemplos anteriores no hay un si … entonces, sin embargo, puede cambiarse cada frase como:

- Si las niñas son grandes entonces no lloran.
- Si no se pone atención en clase entonces es difícil estudiar.

Ejemplo

Para entender la tabla de verdad de una proposición condicional, pondremos como ejemplo la siguiente proposición condicional: “Si resulto electo como rector, entonces el desayuno lo bajaré a 5 pesos”.

Solución paso a paso

Paso 1: identificar cuáles son todas las posibilidades que existen, que son

a. Resulto electo como rector, entonces el desayuno baja a 5 pesos.
b. Resulto electo como rector, entonces el desayuno NO baja 5 pesos.
c. No resulto electo como rector, entonces el desayuno baja 5 pesos.
d. No resulto electo como rector, entonces el desayuno NO baja 5 pesos.

Paso 2: escribir cada posibilidad en una tabla como la siguiente:

Posibilidad	*¿Electo?*	*¿El desayuno baja a 5 pesos?*
a	SÍ	SÍ, p es V, q es V
b	SÍ	NO, p es V, q es F
c	NO	SÍ, p es F, q es V
d	NO	NO, p es F, q es F

Paso 3: identificar en qué casos no se mintió. Es decir, ¿en qué casos el candidato a rector dijo la verdad? Por ejemplo, en el caso de resultar electo y NO bajar el precio del desayuno entonces ahí mintió.

Posibilidad	*¿Electo?*	*¿El desayuno baja a 5 pesos?*	*¿Mintió?*
a	SÍ	SÍ, p es V, q es V	NO
b	SÍ	NO, p es V, q es F	SÍ
c	NO	SÍ, p es F, q es V	NO
d	NO	NO, p es F, q es F	NO

Paso 4: la tabla de verdad de $p \rightarrow q$ va a obtener un valor falso (F) cuando hay una mentira. Esto significa que cuando el antecedente se cumple, pero el consecuente no, entonces es falso.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Solución paso a paso

Ejemplo

Dadas p, q y r falsas, determinar la tabla de verdad de:

$$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg r \rightarrow q)$$

Paso 1: sustituir V y F en p, q y r

$$(F \rightarrow \neg F) \rightarrow (\neg F \rightarrow F).$$

Paso 2: Sabiendo que $\neg$F es V sustituir en (F $\rightarrow \neg$F) $\rightarrow$ ($\neg$F $\rightarrow$ F) quedando como resultado: (F $\rightarrow$ V) $\rightarrow$ (V $\rightarrow$ F).

Paso 3: Se utiliza la tabla de verdad de las condicionales

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

F $\rightarrow$ V da como resultado V y V $\rightarrow$ F da una F quedando: V $\rightarrow$ F que verificando en la tabla de verdad resulta ser FALSO.

Ejemplo

A partir de una proposición como "Si hace frío en la UAM-C entonces llevaré mi chamarra", comprobaremos si se miente en la siguiente proposición: (p $\wedge \neg$q)

Solución paso a paso

Paso 1: p es equivalente a "hace frío en la UAM-C" y q es equivalente a "llevaré mi chamarra".

Paso 2: sacar la tabla de verdad para p $\wedge \neg$q

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Paso 3: sacar la tabla de verdad para $\neg$ (p $\rightarrow$ q) para saber cuándo se miente:

p	q	$p \to q$	$\neg (p \to q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

Paso 4: comparando ambas tablas de verdad podemos ver que son equivalentes y, por lo tanto $(p \wedge \neg q)$, es semejante a negar la proposición condicional.

La negación condicional

La negación de una condicional se escribe como: $(p \wedge \neg q)$.

Actividad integradora

Ejercicio 12: elaborar la tabla de verdad para la proposición condicional $(\neg p \to \neg q) \to (\neg p \wedge q)$.

Ejercicio 13: elaborar la tabla de verdad para la proposición condicional $(\neg p \to \neg q) \to (q \vee p)$.

Ejercicio 14: elaborar la tabla de verdad para la proposición condicional $(p \to \neg q) \to (\neg q \to p)$.

Ejercicio 15: expresa la negación para la siguiente condicional: Todos los perros tienen pulgas.

Muchos teoremas y propiedades de las matemáticas se plantean utilizando proposiciones condicionales. Sabemos que cualquier proposición está formada por un *antecedente* y un *consecuente*. Si se intercambian, se niegan, o las dos cosas, se forma una proposición condicional.

Dependiendo de cómo se cambie el antecedente con el consecuente se pueden formar proposiciones condicionales diferentes, por ejemplo, 1) la recíproca, 2) la inversa y la 3) contrapositiva. Enseguida se brindan ejemplos de cada cual.

Condicional recíproca. La proposición inicial se llama directa. Por ejemplo, si se tiene como proposición inicial "si Juan va al baño entonces yo me quedo cuidando la mesa", su condicional recíproca consiste en intercambiar el antecedente por el consecuente y viceversa. Por lo tanto, la condicional recíproca sería: "si yo me quedo cuidando la mesa entonces Juan va al baño".

Condicional recíproca

Si se tiene $p \rightarrow q$ la condicional recíproca consiste en $q \rightarrow p$

Condicional inversa. La condicional inversa consiste en negar tanto el antecedente como el consecuente. Para el ejemplo: "si Juan va al baño entonces yo me quedo cuidando la mesa", la condicional inversa sería: "si Juan NO va al baño entonces yo NO me quedo cuidando la mesa".

Condicional inversa

Si se tiene $p \rightarrow q$ la condicional inversa consiste en $\neg\,(p \rightarrow q)$ que equivale a: $\neg p \rightarrow \neg q$.

Condicional contrapositiva. La condicional contrapositiva consiste en intercambiar y negar el antecedente y el consecuente. Para el ejemplo: "si Juan va al baño entonces yo me quedo cuidando la mesa", la condicional contrapositiva sería tomar la condicional recíproca en el que obtuvimos: "si yo me quedo cuidando la mesa, entonces Juan va al baño", y luego aplicar la negación para ambas partes. Así, negando la proposición anterior se obtiene "si yo NO me quedo cuidando la mesa entonces Juan NO va al baño".

Condicional contrapositiva

Si se tiene $p \rightarrow q$ la condicional contrapositiva consiste en $\neg\,(q \rightarrow p)$ que equivale a: $\neg q \rightarrow \neg p$.

En resumen:

Proposiciones condicionales relacionadas
Directa $p \to q$ (Si p, entonces q)
Recíproca $q \to p$ (Si q, entonces p)
Inversa $\neg p \to \neg q$ (Si no p, entonces no q)
Contrapositiva $\neg q \to \neg p$ (Si no q, entonces no p)

Ejemplo

Dada la proposición directa "Si yo vivo en la Ciudad de México, entonces vivo en México", obtener: a) la recíproca, b) la inversa y c) la contrapositiva.

Solución paso a paso

Paso 1: lo más conveniente para estos ejercicios es sustituir los componentes de la frase por símbolos. Así, "Si yo vivo en la Ciudad de México, entonces vivo en México" queda $p \to q$.

Paso 2: observando la tabla anterior sabemos que la recíproca consiste en intercambiar antecedente por consecuente y viceversa obteniendo: $q \to p$.

Paso 3: para obtener la inversa se niegan ambas partes quedando: $\neg p \to \neg q$.

Paso 4: la contrapositiva de acuerdo a la tabla anterior es $\neg q \to \neg p$.

Paso 5: sustituir el texto en cada una de las opciones:

a. La recíproca $q \to p$ equivale a "si vivo en México, entonces vivo en la Ciudad de México".
b. La inversa $\neg p \to \neg q$ equivale a "si yo NO vivo en la Ciudad de México, entonces NO vivo en México".
c. La contrapositiva $\neg q \to \neg p$ equivale a "si NO vivo en México, entonces NO vivo en la Ciudad de México".

Observamos que la recíproca no es necesariamente verdadera, aun cuando la proposición directa lo sea. Con el fin de saber cuáles de las proposiciones son equivalentes, se debe de obtener la tabla de verdad para cada una.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$ *Directa*	$q \to p$ *Recíproca*	$\neg p \to \neg q$ *Inversa*	$\neg q \to \neg p$ *Contrapositiva*
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V

equivalentes

equivalentes

La recíproca y la inversa son equivalentes, así como la directa y la contrapositiva son equivalentes.

Actividad integradora

Ejercicio 16: indica si es falso o verdadero en las siguientes proposiciones condicionales:

a. $V \to (6 = 3)$
b. $(5 < 2) \to F$
c. $(3 \neq 2+1) \to V$

Ejercicio 17: ¿qué refranes conoces?, ¿cómo podemos pasarlos a condicionales?

Los alumnos lo explican

Ejercicio: para la siguiente proposición condicional, obtén su tabla de verdad: $(\neg p \to \neg q) \to (\neg p \wedge q)$.

Solución:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$(\neg p \to \neg q)$	$(\neg p \wedge q)$	$(\neg p \to \neg q) \to (\neg p \wedge q)$
V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	F	F

Respuestas y razonamiento

1. "Primero puse las dos proposiciones en las dos primeras columnas. En la primera puse V, V, F, F porque así se pone cuando no te dicen si p o q son falsas o verdaderas.
2. En la segunda, V, F, V, F. Las dos columnas dan todas las combinaciones de V con F.
3. Después hice las negaciones de p y q que sólo es poner V en vez de F y viceversa.
4. Después hice la condicional entre (¬p → ¬q) basándome en la tabla.
5. Después hice otro paréntesis (¬p ∧ q) donde sólo V+V = V, y las demás son falsas.
6. Al final hice la condicional entre ambos paréntesis basándome en la tabla para obtener la última columna".

Alejandro Morales Arbolella,
Licenciatura en Ciencias de la Comunicación

1. "Obtenemos los posibles valores para p y q, y su negación .
2. (¬p → ¬q) en esta condicional el resultado es falso cuando q es falso.
3. (¬p ∧ q) obtenemos la conjunción con los valores.
4. Realizamos la condicional para v→f el resultado es falso y para v→v el resultado es verdadero".

Alejandro Díaz Ávalos,
Licenciatura en Tecnologías y Sistemas de Información.

1. "Lo primero es sacar los valores para p y q con todas las posibles de verdadero y falso.
2. Luego, su negación.
3. Después, todas las que vienen en paréntesis y después ya para finalizar resuelves las condicionales".

Daniel Armando Jaime González,
Licenciatura en Diseño

Proposiciones bicondicionales

La proposición *p* si y solo si *q* (abreviada como *p* si *q*) se llama bicondicional y se expresa como sigue:

$$\boxed{p \leftrightarrow q}$$

$p \leftrightarrow q$, la bicondicional, es verdadera sólo cuando p y q tienen el mismo valor de verdad. Esto significa que ambas proposiciones $p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$ deben tener el mismo valor de verdad. Por ejemplo:

- Puedes votar si eres mayor de 18 años.
- Si eres mayor de 18 años entonces puedes votar.

Por definición:

$$p \leftrightarrow q \cong (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

¿Cuál es la tabla de verdad para la *bicondicional*?

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo

¿Las siguientes condicionales son bicondicionales?

a. $6 + 9 = 15$ si y sólo si $12 + 4 = 16$
b. $5 + 2 = 10$ si y sólo si $17 + 19 = 36$
c. $4 = 3$ si y sólo si $10 > 11$

Solución paso a paso

Paso 1: la bicondicional indica que $p \leftrightarrow q \cong (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, por lo que para el ejercicio a) $6 + 9 = 15$ es verdadero y $12 + 4 = 16$ es verdadero. Ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad, por lo que la bicondicional es verdadera.

Paso 2: para el ejercicio b) 5+2=10 es falso y 17+19=36 es verdadero, por lo que tienen valores de verdad diferentes y la bicondicional es falsa.

Paso 3: finalmente para el ejercicio c) 4=3 es falso y 10>11 es falso; ambos tienen el mismo valor de verdad y entonces la bicondicional es verdadera.

Método de la tabla de verdad

Hasta aquí hemos trabajado utilizando el razonamiento. Existen dos clases de razonamiento: inductivo y deductivo. En el primero observamos patrones para resolver problemas. En cambio, en el segundo, el deductivo, se extraen conclusiones de premisas (suposiciones, leyes, reglas, ideas ampliamente aceptadas u observaciones).

En el razonamiento existen argumentos que son válidos y otros que no lo son, llamados falacias. Un argumento es válido si la conclusión se deduce lógicamente, siempre que se cumplan todas las premisas. La demostración de la validez entre las premisas y la conclusión se realiza mediante el método de la tabla de verdad. Un argumento es válido si las premisas en su conjunto implican lógicamente una conclusión.

Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ son las premisas y C es la conclusión, debemos de demostrar mediante una tabla de verdad que la siguiente expresión es una tautología:[2]

$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow C$$

Para demostrar si una implicación es válida, se debe escribir en cada una de las columnas de la tabla de verdad cada una de las partes que componen la expresión, así como en una columna el valor de verdad mediante la conjunción entre las premisas. Entonces, si tenemos:

Si hace frío en la UAM-C, entonces debo de usar mi chamarra.
Hace frío en la UAM-C.

Debo usar mi chamarra.

Usando las tablas de verdad debemos identificar las proposiciones:

p representa “hace frío en la UAM-C”
q representa “debo de usar mi chamarra”

2. Una tautología (del griego ταυτολογία, “decir lo mismo”) es una fórmula bien formada de un sistema de lógica proposicional que resulta verdadera para cualquier interpretación; es decir, para cualquier asignación de valores de verdad que se haga a sus fórmulas atómicas (Wikipedia, 2016).

Para determinar si es válido, tenemos que determinar si la conjunción de ambas premisas implica la conclusión para todos los casos posibles de valores de verdad para p y q.

La conjunción de:

Premisa 1: $p \to q$
Premisa 2: p

Conclusión: q

es $\underbrace{[(p \to q)}_{\text{premisa}} \; \underbrace{\wedge \; p\,]}_{\text{y premisa}} \; \underbrace{\to}_{\text{implica}} \; \underbrace{q}_{\text{premisa}}$

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p\,] \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Para todos los casos obtenemos V, comprobando que es una tautología.

Modus ponens

La conjunción de: $\begin{array}{c} p \to q \\ p \\ \hline q \end{array}$ se llama *Modus ponens* o Ley de separación.

Ejemplo

Determinar si la siguiente proposición es válida o no:

Si mi cheque llega a tiempo, me inscribiré en el trimestre de Primavera 16.
Me inscribí en el trimestre de primavera 16.

Mi cheque llegó a tiempo.

Solución paso a paso

Paso 1: asignar una letra para representar cada proposición componente del argumento. Para este caso:
p representa “mi cheque llega a tiempo”
q representa “me inscribiré en el trimestre de Primavera 16”.

Paso 2: expresar cada premisa y la conclusión mediante símbolos. En este caso, la conclusión puede ser representada mediante el símbolo *p*.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

Paso 3: formar la proposición simbólica del argumento entero, colocando la conjunción de todas las premisas.

$$[(p \rightarrow q) \wedge q\,] \rightarrow p$$

Paso 4: completar la tabla de verdad.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

Paso 5: la proposición no es válida debido a que no es verdadera en todas sus posibilidades.

Ejemplo

Determinar si la siguiente proposición es válida o no:

Si pudiera me iría a Francia en este momento, me compraría el boleto.
Yo no me he comprado el boleto.

No puedo irme a Francia en este momento.

Solución paso a paso

Paso 1: asignar una letra para representar cada proposición componente del argumento. Para este caso:
p representa "me iría a Francia en este momento"
q representa "me compraría el boleto"
$\neg q$ representa "no me he comprado el boleto"
$\neg p$ representa "no puedo irme a Francia en este momento"

Paso 2: expresar cada premisa y la conclusión mediante símbolos.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Paso 3: formar la proposición simbólica del argumento entero, colocando la conjunción de todas las premisas.

$$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q\,] \rightarrow \neg p$$

Paso 4: completar la tabla de verdad.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q\,] \rightarrow \neg p$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Paso 5: la proposición es válida, debido a que es verdadera en todas sus posibilidades.

Modus tollens

La conjunción de: $p \rightarrow q$ se llama *Modus tollens*.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array}$$

Ejemplo

Determinar si la siguiente proposición es válida o no. Es importante ver que es una proposición formada por una disyunción.

Me iré al cine o me iré a comer sushi.
No iré a comer sushi.

Me iré al cine.

Solución paso a paso

Paso 1: asignar una letra para representar cada proposición componente del argumento. Para este caso:
p representa “me iré al cine”
q representa “me iré a comer sushi”
¬q representa “no me iré a comer sushi”

Paso 2: expresar cada premisa y la conclusión mediante símbolos.

$p \vee q$
$\neg q$

---

p

Paso 3: formar la proposición simbólica del argumento entero, colocando la conjunción de todas las premisas.

$$[(p \vee q) \wedge \neg p\,] \rightarrow q$$

Paso 4: completar la tabla de verdad.

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

Paso 5: la proposición es válida, debido a que es verdadera en todas sus posibilidades.

Silogismo disyuntivo

La conjunción de: $p \vee q$ se llama *Silogismo disyuntivo*.

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}$$

Finalmente, existe el *razonamiento transitivo*, en el que la transitividad es una propiedad de la lógica que consiste en ordenar, comparar y describir una relación, de tal modo que pueda llegarse a una conclusión.

Ejemplo

Determinar si la siguiente proposición que utiliza transitividad es válida o no:

Si no hay nada en el refrigerador entonces iré al súper.
Si voy al súper entonces debo de retirar dinero.

Si no hay nada en el refrigerador entonces debo retirar dinero

Solución paso a paso

Paso 1: asignar una letra para representar cada proposición componente del argumento. Para este caso:
p representa "no hay nada en el refrigerador"
q representa "iré al súper"
r representa "debo retirar dinero"

Paso 2: expresar cada premisa y la conclusión mediante símbolos.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline p \rightarrow r \end{array}$$

Paso 3: formar la proposición simbólica del argumento entero, colocando la conjunción de todas las premisas.
$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

Paso 4: completar la tabla de verdad.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Paso 5: la proposición es válida, debido a que es verdadera en todas sus posibilidades y se trata de un razonamiento transitivo.

Falacias

Existen proposiciones con una apariencia de razonamiento correcto, pero que no son válidas o son incorrectas, a éstas se les llama falacias.

Entre las falacias se encuentran las siguientes:

Falacia del recíproco	***Falacia del inverso***
$p \to q$	$p \to q$
q	$\neg p$
p	$\neg q$

Actividad integradora

Ejercicio 18: determina si el argumento es válido o inválido para el siguiente texto: Si la locura por el juguete Furby continúa, entonces las muñecas Lala Loopsy seguirán siendo populares. Las muñecas Barbie continúan siendo las favoritas o las muñecas Lala Loopsy seguirán siendo populares. Las muñecas Barbie no siguen siendo las favoritas. Por lo tanto, la locura por el juguete Furby no continúa.

En este tercer y último capítulo se presentaron diversas definiciones que sirvieron para entender las proposiciones simples y compuestas. Se trabajó con proposiciones compuestas cercanas a la realidad del alumno y se validaron a través del uso de la tabla de verdad. Los alumnos respondieron a problemas a partir de los cuales mostraron el proceso mental que siguen para resolverlos.

Para mayor información

Carlos Muñoz Gutiérrez (2006).

Conclusión

La ordenación conceptual, lo mismo que la afirmación proposicional, la conexión argumentativa y el planteamiento de problemas constituyen, sin lugar a dudas, una de las partes fundamentales de la actividad intelectual humana. Es inconcebible seguir creyendo que las matemáticas son sólo para ciertas disciplinas y no vislumbrar que son parte esencial de nuestro quehacer cotidiano. El sustento, en mayor o menor medida, de toda ciencia es la lógica, aunada al signo. Así, podemos afirmar que las matemáticas se fundamentan en la lógica, en el uso de signos y, por supuesto, en el uso del lenguaje.

La formación y el desarrollo de la capacidad de pensamiento de los alumnos es una de las tareas más importantes de la universidad. En el ámbito de la educación es fundamental prestar especial atención al desarrollo del pensamiento crítico y creativo.

La UAM incide fuertemente en procurar y fortalecer el desarrollo del pensamiento en todos los niveles. En particular, la Unidad Cuajimalpa sustenta su estructura curricular en "la adquisición de lenguajes lógico-formales que constituyen herramientas insustituibles en los procesos de abstracción y simbolización necesarios para la adquisición de conceptos complejos" (Fresán y Outón, 2006). En este sentido, la formación inicial de la UAM Cuajimalpa se centra en el pensamiento (verbal y matemático), mediante el cual la representación, los signos y las inferencias lógicas permitirán a los alumnos tener las habilidades necesarias para trabajar con lenguajes disciplinares.

En este sentido, la UEA Introducción al Pensamiento Matemático plantea pensadores críticos que son capaces de construir argumentos mediante la diferenciación de sus premisas y conclusiones. El presente libro, resultado de la impartición de la UEA con grupos interdisiciplinarios, plantea ejercicios y ejemplos cercanos a la realidad del alumno.

Este libro es original al incorporar el razonamiento, ejecución y explicación de los alumnos al realizar diversos ejercicios. Se propone un acercamiento a los lenguajes formales para generar estructuras cognitivas que le permitan al alumno complementar su formación disciplinar, generando una apropiación del conocimiento, al integrar cada uno de los temas que se exponen con la vida cotidiana, la argumentación y la oralidad.

Pensar en matemáticas tiene el propósito de acompañar al alumno en la búsqueda de ejemplos y ejercicios explicados de diversas formas. También es el resultado de la aplicación del modelo educativo de la Unidad Cuajimalpa, al fomentar la participación del alumno en su propia formación.

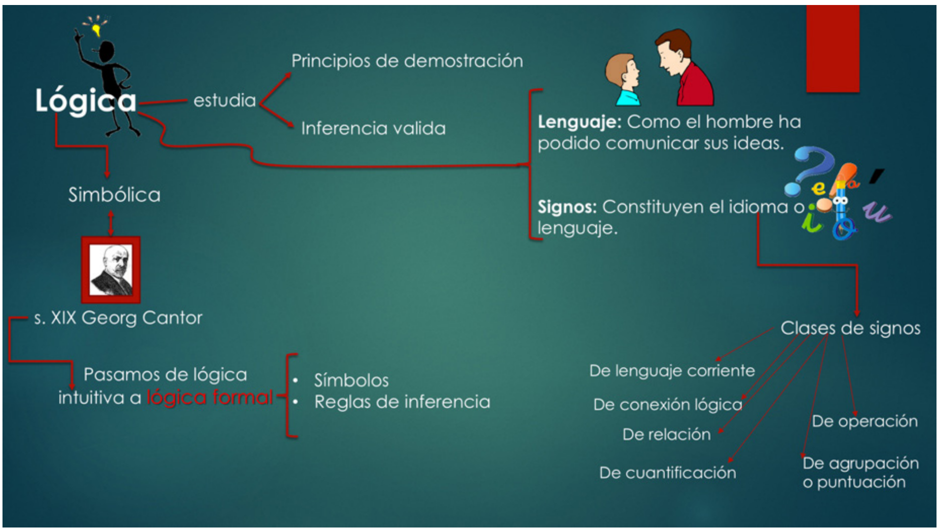
Apéndices

I. Materiales de apoyo

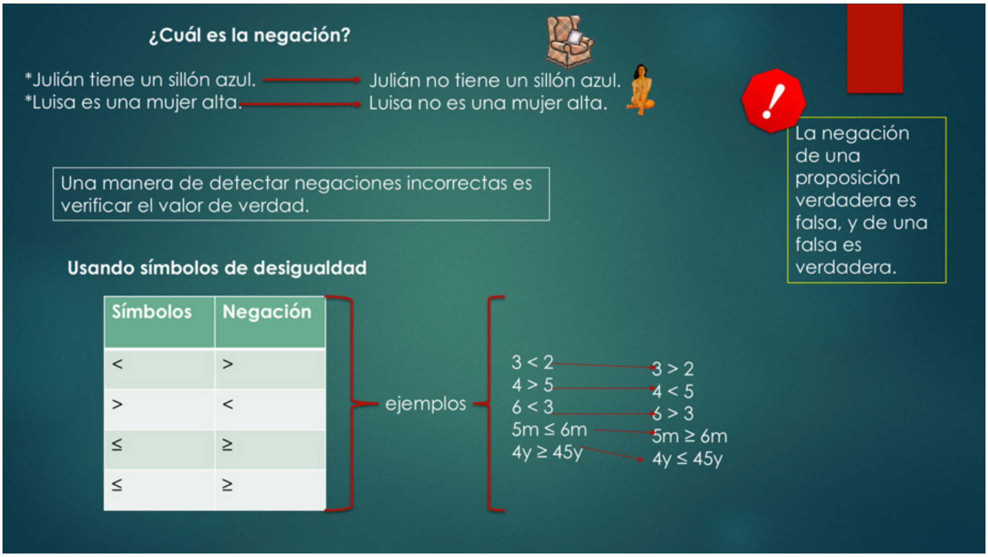
Como un ejercicio para conocer, comprender y aplicar algunos de los temas vistos en la clase de Introducción al Pensamiento Matemático, impartido durante el trimestre de Otoño de 2015, los alumnos realizaron material de apoyo sobre proposiciones simples y compuestas, conjunción, disyunción y negación, tablas de verdad y leyes de Morgan.

A continuación se presentan algunos de los materiales que explican, desde la perspectiva del alumno, algunos conceptos vistos en el tercer capítulo. Dicho material puede revisarse como complemento, aunado a una mayor exposición de ejercicios resueltos. Se extiende un agradecimiento a los alumnos participantes que validaron su material con alumnos de otras generaciones y amigos. Ellos son Alejandro Morales Arbolella y Mariana Martínez Olmos, de la Licenciatura en Ciencias de la Comunicación, así como Luis Gerardo Melo Vázquez, de la Licenciatura en Tecnologías y Sistemas de Información.

Material de Alejandro Morales Arbolella
(Licenciatura en Ciencias de la Comunicación)




Letras y palabras
símbolos
Proposición compuesta
2 o más proposiciones.
El perro es pequeño y tiene ojos grandes
Conectivo lógico
Componentes de la proposición
Principales aplicaciones de la lógica
Estudio del valor de la verdad
Proposiciones
Se define como una aseveración que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas.
Ej.
Ana es una persona delgada.
5 x 25= 1245
Ejemplos de proposiciones compuestas
*La niña tiene piel negra y cabello negro.
*Eres una persona o eres un animal.
*Si no tienes cuidado entonces te puedes lastimar.
*Estás enojado o estás de buenas.
¿Qué no es proposición?
¿A qué estamos?
¿Quién eres?
Eres malo.


¿Cuál es la negación?
*Julián tiene un sillón azul.
Julián no tiene un sillón azul.
*Luisa es una mujer alta.
Luisa no es una mujer alta.
La negación de una proposición verdadera es falsa, y de una falsa es verdadera.
Una manera de detectar negaciones incorrectas es verificar el valor de verdad.
Usando símbolos de desigualdad
Símbolos | Negación
< | >
> | <
≤ | ≥
≤ | ≥
ejemplos
3 < 2
4 > 5
6 < 3
5m ≤ 6m
4y ≥ 45y
3 > 2
4 < 5
6 > 3
5m ≥ 6m
4y ≤ 45y


Para la simplificación uso y manejo de la lógica se usan símbolos
Proposiciones
se representan con
p, q, r
Conectivo | Símbolo | Tipo de proposición
y | ∧ | Conjunción
o | ∨ | Disyunción
no | ~ | Negación
Es importante recordar esta tabla.
Ejemplos
Todos los jóvenes son grandes (P)
¿ ~P ?
Todos los jóvenes no son grandes.
Ayer llovió (p) Juan es animal (q)
p ∧ q
Ayer llovió y Juan es animal.
Liz grita siempre (p) Juan es amable (q)
p ∨ q
Liz grita siempre o Juan es amable.
Ayer fue martes (p) ayer fue un buen día
~(p ∨ q)
Ayer no fue martes o ayer no fue un buen día.
Se cambia de y a o por la negación
Se pone el "no" por la negación


¿Cuántos casos existen de cada situación determinada?
Cuantificadores universales
Cuantificadores existenciales
Todo, cada uno, todos y ninguno.
Hay, al menos uno…
¿Cómo negar estos cuantificadores que son parte de las proposiciones?
Todos
Algunos
Ninguno
Algunos + NO
Ninguno + NO
Todos + NO
Algunos + NO
Ninguno + NO
Algunos + NO
Todos
Todos
Ninguno
Todos son felices.
Algunos no son felices.
Ningún burro llora siempre
Algún burro no llora siempre
Algunos gatos no son regios.
Todos los gatos son regios.
Todos los enanos no vuelan.
Ningún enano vuela.
Todos los niños son azules.
¿Cómo se negaría?
Se pone el NO
Algunos niños no son azules.
Se cambia todos por algunos

¿Es o no una proposición?

El lápiz es rojo o amarillo.
¿Cuándo sales a comer?
El gorro es verde.
Juan una vez se perdió.
Héctor es comerciante y Víctor es abogado.
34+1=35 y 22+1=23
Saludos.

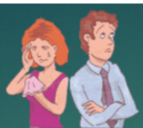
¿Es una proposición simple o compuesta?

El niño es morado. SIMPLE
Tammy es estudiante y maestra. COMPUESTA
Todos los chicos van a la escuela y nadan en las noches. COMPUESTA
Andrea vive lejos. SIMPLE
Marco es buen amigo o juega futbol. COMPUESTA

¿Cuál es su negación?

Todos los chicos que no lloran son fuertes. → Ningún chico que llora es fuerte.
Ernesto es un buen samaritano. → Ernesto no es un buen samaritano.
Dios no es bueno. → Dios es bueno.
Algún murciélago vuela rápido. → Ningún murciélago no vuela rápido.
Las aves son grandes y peludas. → Las aves no son grandes o no son peludas.

¿Recuerdas bien los símbolos?



El es sincero (p) Ella es fuerte (q)

1. $\sim(\sim p \wedge q)$
2. $p \wedge q$
3. $\sim p \vee q$
4. $\sim p \vee \sim q$
5. $\sim q$

1. El es sincero o ella no es fuerte.
2. El es sincero y ella es fuerte.
3. El no es sincero y ella es fuerte.
4. El no es sincero y ella no es fuerte.
5. Ella no es fuerte.

Transcribe las siguientes proposiciones a símbolos.

Pedro baila bien (p) Juan es gordo (q)

1.Juan no es gordo. $\sim q$
2.Pedro baila bien y Juan es gordo. $p \wedge q$
3.Ni pedro baila bien o ni Juan es gordo. $\sim p \vee \sim q$
4.Pedro no baila bien o Juan es gordo. $\sim p \vee q$
5.Pedro baila bien o Juan no es gordo. $\sim(\sim p \wedge q)$

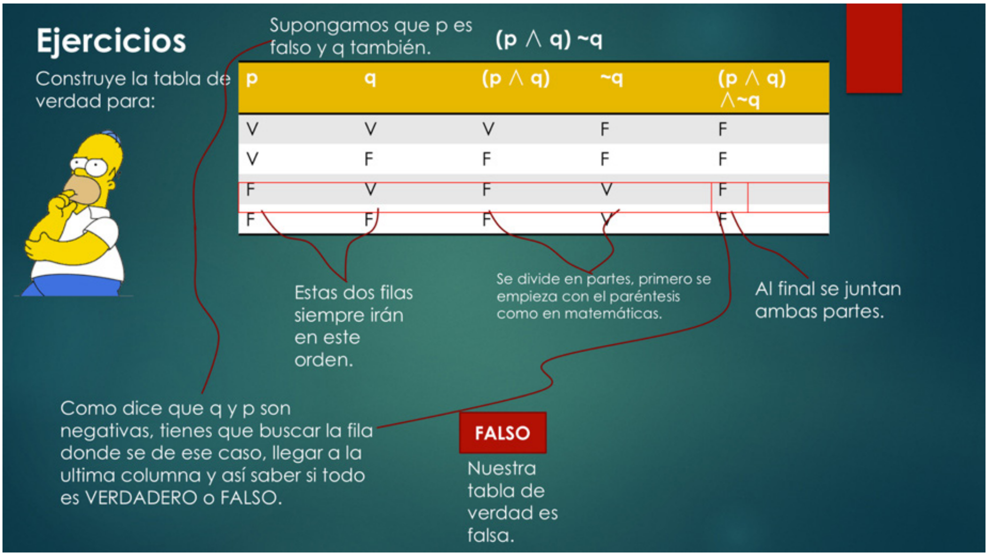
¿Hay publicidad que se contradice?

Sí las hay, ejemplo:
Todos los jueves todos los helados 2 x 1.
Al leer completa la promoción hay excepciones entonces no son "Todos".

¿Hay diferencia?

Todos sus hijos son altos.
No todos sus hijos son altos.
NO hay.


Objetivo: Encontrar los valores de verdad de las proposiciones compuestas.
¿Cuál proposición es verdadera y cuál falsa?
*Todos los perros son animales y
*todas las semanas tienen 32 días.
FALSA
VERDADERA
*Todos los celulares son negros y todas las plantas son seres vivos.
Conjunción: Unión de dos o más cosas.
Y ∧
Tabla de verdad de Y
Tablas de verdad
Disyunción: Separación o desunión.
o V
Negación: Siempre será lo contrario. ~
Tabla de verdad de O.
p q p ∧ q
V V V
V F F
F V F
F F F
En algunas ocasiones se usa pero en lugar de y: Julio quiere bailar pero Erika quiere jugar.
Mientras exista una proposición falsa, las dos son falsas.
p ~p
V F
F V
p q p V q
V V V
V F V
F V V
F F F
Mientras exista una proposición verdadera, las dos son verdaderas.


Ejercicios
Construye la tabla de verdad para:
Supongamos que p es falso y q también.
(p ∧ q) ~q
p q (p ∧ q) ~q (p ∧ q) ∧~q
V V V F F
V F F F F
F V F V F
F F F V F
Estas dos filas siempre irán en este orden.
Se divide en partes, primero se empieza con el paréntesis como en matemáticas.
Al final se juntan ambas partes.
Como dice que q y p son negativas, tienes que buscar la fila donde se de ese caso, llegar a la ultima columna y así saber si todo es VERDADERO o FALSO.
FALSO
Nuestra tabla de verdad es falsa.

MÁS EJERCICIOS

Si p es verdadero y q es falso construye la tabla de verdad para: $(p \lor q) \land \sim q$

p	q	$(p \lor q)$	$\sim q$	$(p \lor q) \land \sim q$
V	V	V	F	F
V	F	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

VERDADERO

Si p es verdadero y q también, construye la tabla de verdad para: $[\sim q \land (p \lor \sim q)] \lor (p \lor \sim q)$

p	q	$\sim q$	$(p \lor \sim q)$	$[\sim q \land (p \lor \sim q)$	$[\sim q \land (p \lor \sim q)] \lor (p \lor \sim q)$
V	V	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V

VERDADERO

Si p es verdadero y q también, construye la tabla de verdad para: $[p \lor (\sim p \lor q)] \land (p \lor \sim q)$

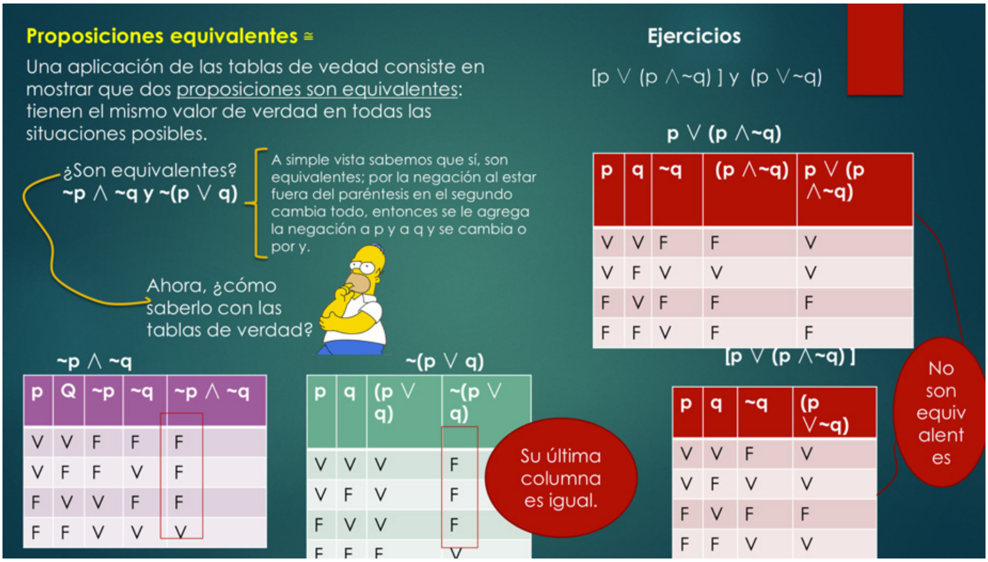
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p \lor q)$	$[p \lor (\sim p \lor q)]$	$(p \lor \sim q)$	$[p \lor (\sim p \lor q)] \land (p \lor \sim q)$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V

VERDADERO

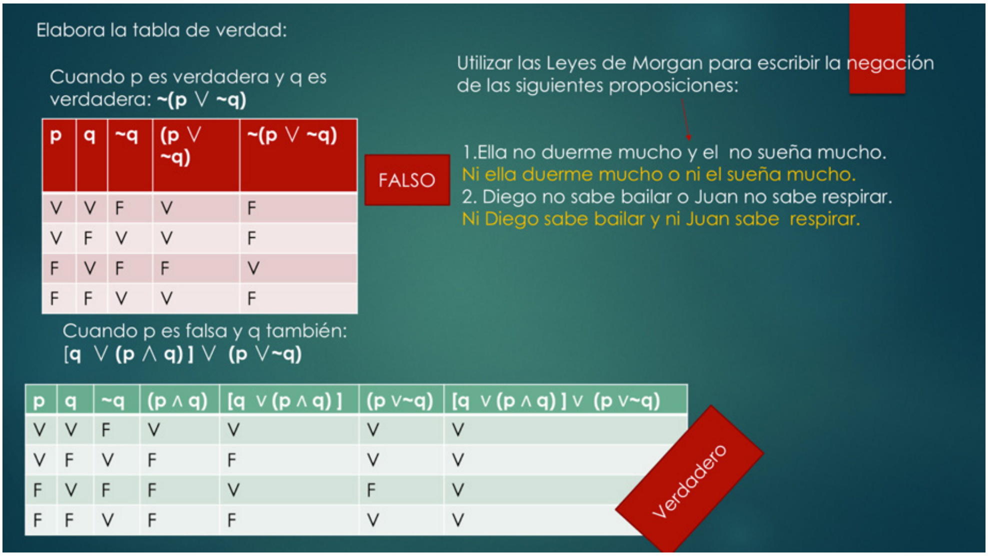
Si p es falsa y q verdadera construye la tabla de verdad para: $[q \lor (p \land q)] \lor (p \lor \sim q)$

p	q	$\sim q$	$(p \land q)$	$[q \lor (p \land q)]$	$(p \lor \sim q)$	$[q \lor (p \land q)] \lor (p \lor \sim q)$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	F	F	V	V

VERDADERO


Proposiciones equivalentes ≅
Una aplicación de las tablas de vedad consiste en mostrar que dos proposiciones son equivalentes: tienen el mismo valor de verdad en todas las situaciones posibles.
¿Son equivalentes?
~p ∧ ~q y ~(p ∨ q)
A simple vista sabemos que sí, son equivalentes; por la negación al estar fuera del paréntesis en el segundo cambia todo, entonces se le agrega la negación a p y a q y se cambia o por y.
Ahora, ¿cómo saberlo con las tablas de verdad?
~p ∧ ~q
p | Q | ~p | ~q | ~p ∧ ~q
V | V | F | F | F
V | F | F | V | F
F | V | V | F | F
F | F | V | V | V
~(p ∨ q)
p | q | (p ∨ q) | ~(p ∨ q)
V | V | V | F
V | F | V | F
F | V | V | F
F | F | F | V
Su última columna es igual.
Ejercicios
[p ∨ (p ∧~q)] y (p ∨~q)
p ∨ (p ∧~q)
p | q | ~q | (p ∧~q) | p ∨ (p ∧~q)
V | V | F | F | V
V | F | V | V | V
F | V | F | F | F
F | F | V | F | F
[p ∨ (p ∧~q)]
p | q | ~q | (p ∨~q)
V | V | F | V
V | F | V | V
F | V | F | F
F | F | V | V
No son equivalentes


Estas equivalencias también son llamadas
Leyes de Morgan.
Para cualesquiera proposiciones p y q:
~(p∨q) ≅ ~p ∧ ~q
y
~(p∧q) ≅ ~p ∨ ~q
Un poco más complicado:
~p ∨ (q ∧ ~p)
Negar ambos componentes de la proposición y cambiar ∨ por ∧
~[~p ∨ (q ∧ ~p)] ≅ p ∧ ~ (q ∧ ~p)
Aplicando una vez más la Ley de Morgan
p ∧ ~ (q ∧ ~p) ≅ p ∧ (~ q ∨ ~(~p))
≅ p ∧ (~ q ∨ p)
Sabiendo ya todo lo referente a las tablas de verdad y las equivalencias, podrás resolver con facilidad los siguientes ejercicios:
*Usando las Leyes de Morgan encuentra la negación:
Juan no es animal y Pedro no es un gato.
Ni Juan es animal o ni Pedro es un gato
Liz ni baila bien y ni juega futbol.
Liz no baila bien o no juega futbol.
El no tiene zapatos y no tiene agua.
El ni tiene zapatos o ni tiene agua.
Andrea no grita mucho o Andrea no vomita.
Andrea ni grita mucho y ni vomita.

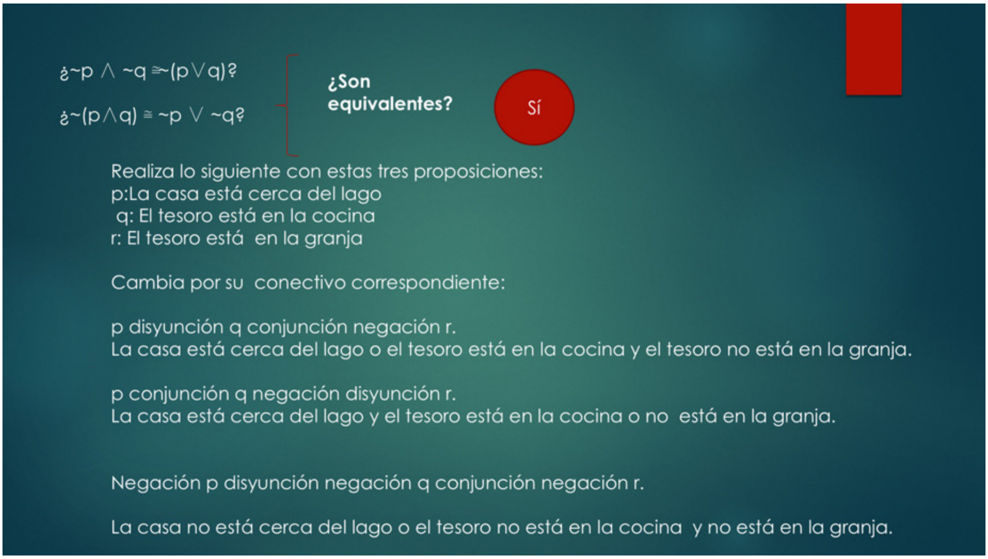

Elabora la tabla de verdad:
Cuando p es verdadera y q es verdadera: ~(p ∨ ~q)

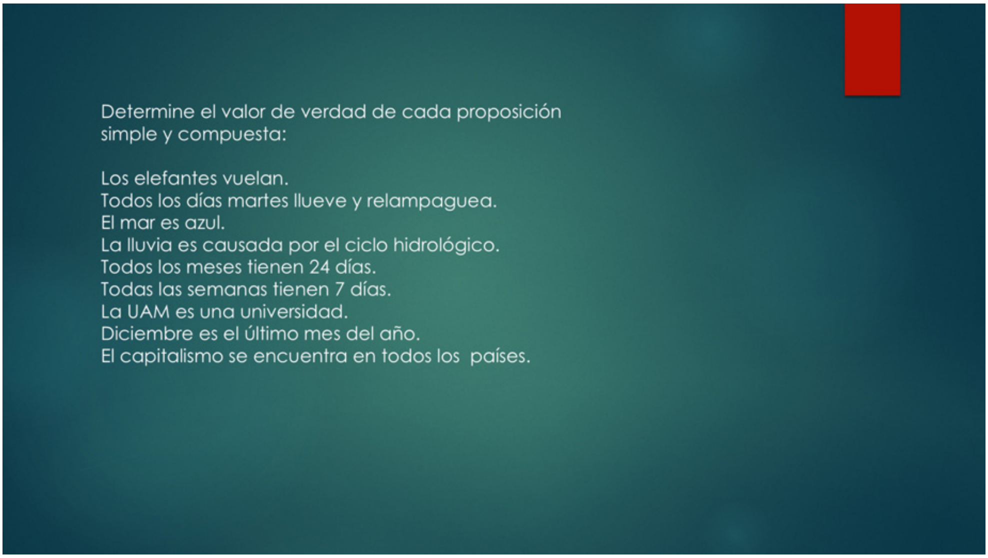
p	q	~q	(p ∨ ~q)	~(p ∨ ~q)
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

FALSO
Cuando p es falsa y q también:
[q ∨ (p ∧ q)] ∨ (p ∨~q)

p	q	~q	(p ∧ q)	[q ∨ (p ∧ q)]	(p ∨~q)	[q ∨ (p ∧ q)] ∨ (p ∨~q)
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	F	F	V	V

Verdadero
Utilizar las Leyes de Morgan para escribir la negación de las siguientes proposiciones:
1.Ella no duerme mucho y el no sueña mucho.
Ni ella duerme mucho o ni el sueña mucho.
2. Diego no sabe bailar o Juan no sabe respirar.
Ni Diego sabe bailar y ni Juan sabe respirar.


¿~p ∧ ~q ≅~(p∨q)?
¿~(p∧q) ≅ ~p ∨ ~q?
¿Son equivalentes?
Sí
Realiza lo siguiente con estas tres proposiciones:
p:La casa está cerca del lago
q: El tesoro está en la cocina
r: El tesoro está en la granja
Cambia por su conectivo correspondiente:
p disyunción q conjunción negación r.
La casa está cerca del lago o el tesoro está en la cocina y el tesoro no está en la granja.
p conjunción q negación disyunción r.
La casa está cerca del lago y el tesoro está en la cocina o no está en la granja.
Negación p disyunción negación q conjunción negación r.
La casa no está cerca del lago o el tesoro no está en la cocina y no está en la granja.


Determine el valor de verdad de cada proposición simple y compuesta:
Los elefantes vuelan.
Todos los días martes llueve y relampaguea.
El mar es azul.
La lluvia es causada por el ciclo hidrológico.
Todos los meses tienen 24 días.
Todas las semanas tienen 7 días.
La UAM es una universidad.
Diciembre es el último mes del año.
El capitalismo se encuentra en todos los países.

Material de Luis Gerardo Melo Vázquez
(Licenciatura en Tecnologías y Sistemas de Información)

Proposiciones

p, q

Una *proposición* es una declaración que se puede evaluar como **verdadera** o **falsa**, pero **no ambas**.

"Las mañanas en Cuajimalpa son frías".

Deseos, ordenes, preguntas o paradojas **no son proposiciones.**

¡Pedro, baja de ahí! ¿Está María en casa?	Debemos salir pronto. Esta oración es falsa.

Las proposiciones se pueden representar con letras **(p, q, r)**.

"Las mañanas en Cuajimalpa son frías" se puede representar con la letra **p.**

1

Proposiciones compuestas

$p \wedge q$

Las **proposiciones compuestas** son dos o más proposiciones unidas por un **conector lógico** (si… entonces, y, o, no, etc.).

Hoy voy al cine **y** *al circo*.

Si *comes bien,* **entonces** *crecerás grande y fuerte.*

La sesión pasada **no** *hubo actividades.*

Los perros son grandes **o** *son pequeños.*

Negaciones

~

La **negación** es una operación sobre un valor de verdad que **vuelve falso** el **valor verdadero** de una proposición **y viceversa.**

El gato de María ***es*** *un persa,* la negación sería:
El gato de María ***no es*** *un persa.*

El vecino ***no es*** *amable,* la negación sería:
El vecino ***es*** *amable.*

$10 < 34$, la negación sería:
$10 > 34$.

$35 + 2$ **y** $7 > 9$, la negación sería:
$35 - 2$ **o** $7 < 9$.

Simbología

Para simplificar las expresiones lógicas, se hace uso de **simbología**.

conectivo	símbolo	tipo de proposición
y	$\wedge$	conjunción
o	$\vee$	disyunción
no	~	negación

Tenemos: "Los perros son leales" y "Los gatos son audaces".

"Los perros **son** *leales"* ahora es **p**.
"Los gatos **son** *audaces"* ahora es **q**.

"Los perros **son** *leales* **y** *los gatos* **son** *audaces"* se representa como: $p \wedge q$

"Los perros **no son** *leales* **o** *los gatos* **son** *audaces"* se representa como: $\sim p \vee q$

"Ni *los perros* **son** *leales* **ni** *los gatos* **son** *audaces"* se representa como: $\sim(p \wedge q)$

Cuantificadores

Los **cuantificadores** se utilizan para determinar **cuantos** casos existen de una determinada situación

Son **cuantificadores universales**:

Todos
Cada uno
Ningunos
Algunos

Son **cuantificadores existenciales**:

Hay
Al menos uno
Para algún

Si una preposición es **verdadera**, su **negación** debe ser **falsa**.

proposición	negación
todos	algunos
todos no	ninguno
algunos	ninguno
algunos no	todos
ninguno	alguno
ninguno no	todos

Cuantificadores (cont.)

"Algunos hombres son daltónicos" (p)

Analicemos la siguiente información:

Grupo 1 Mario es daltónico, José es daltónico, Luis es daltónico.
Grupo 2 Alberto **no** es daltónico, Juan **no** es daltónico, Erick es daltónico.
Grupo 3 Francisco **no** es daltónico , Marcos **no** es daltónico, Ignacio **no** es daltónico.

~p sería:
"Ningún hombre es daltónico" (~p)

Para comprobar que la negación de p es correcta, realizaremos una tabla de verdad utilizando los grupos anteriores.

	G1	G2	G3
Algunos hombres son daltónicos (proposición)	V	V	F
Ningún hombre es daltónico (posible negación)	F	F	V
Algún hombre no es daltónico (posible negación)	F	V	V
Ningún hombre no es daltónico (posible negación)	V	F	F

6

Tablas de verdad

V, F

Las **tablas de verdad** se utilizan para determinar el *valor de verdad* en una **proposición compuesta**.

Los gatos maúllan y los perros ladran.

La primera parte es verdadera, la segunda también.

La proposición es **verdadera**.

Los gatos maúllan y los perros croan.

La primera parte es verdadera, la segunda no lo es.

La proposición es **falsa**.

La **conjunción** es un operador lógico que **une** dos o más cosas.

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla de verdad para **conjunciones**.

En resumen, para que una proposición con conjunciones sea verdadera, **todas** sus partes deben ser **verdaderas.**

Tablas de verdad (cont.)

Sea 9<7 y 5<6, ¿Cuál sería el valor de verdad para **p∧q**?

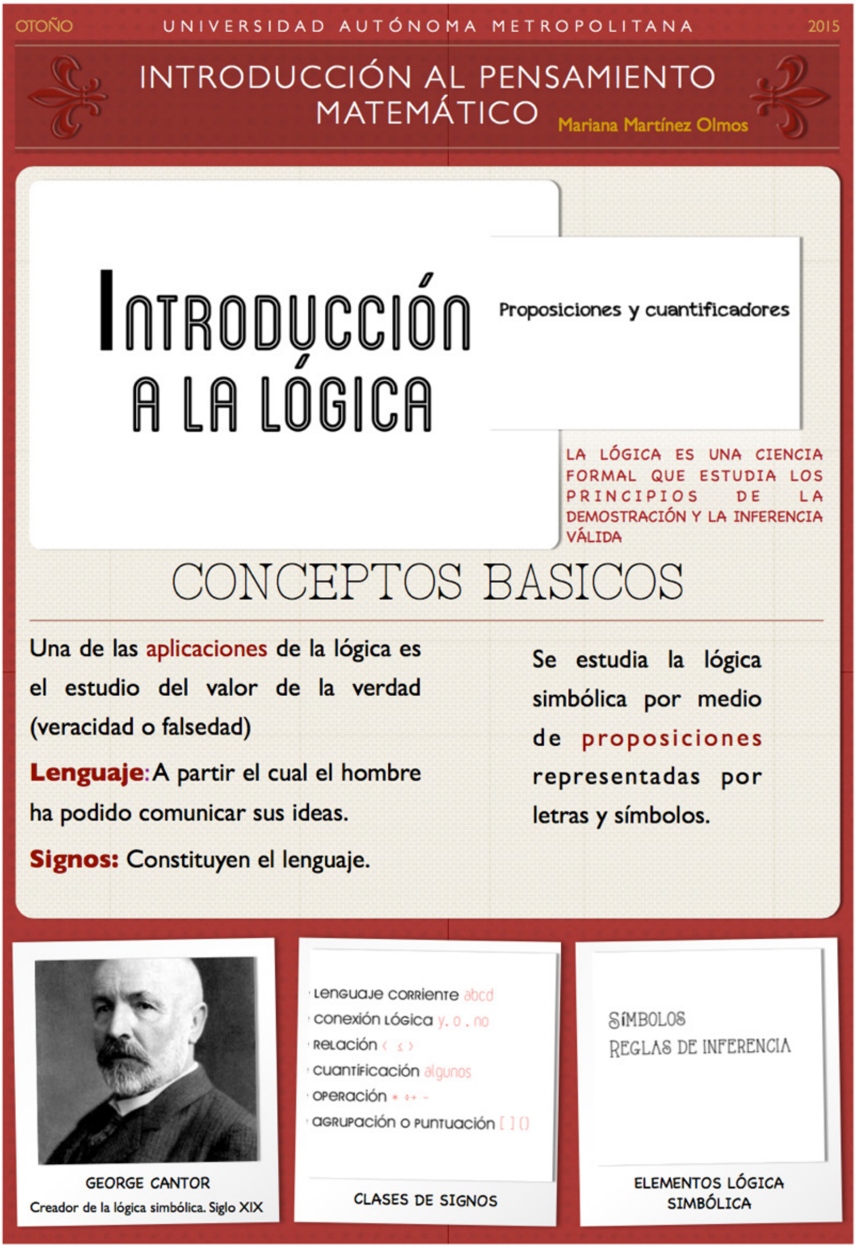
p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Retomando la tabla de verdad para conjunciones, tenemos que si p es falsa y q es verdadera, **p∧q** es **falso**.

Se puede utilizar "**pero**" en lugar de "**y**" para expresar una conjunción.

"Los peces nadan en el agua ***pero*** *las liebres corren por el monte."*

Material De Mariana Martínez Olmos
(Licenciatura en Ciencias de la Comunicación)



Proposiciones

CONCEPTOS

Proposición: Aseveración que puede ser verdadera o falsa

No es una proposición: Ordenes, preguntas, algo subjetivo, paradojas.

Proposición compuesta: Formada por la combinación de dos o más proposiciones, contienen conectores como:, y, o, si entonces.

Negaciones: Cuando se niega una proposición. Una verdadera se convierte en una falsa y viceversa.

"Una manera de detectar negaciones incorrectas es verificar el valor de verdad"

EJEMPLOS

Las proposiciones simples:

- Las series de T.V son muy populares.
- 5 < 3
- Gabriel García Marquez escribió 100 años de soledad

No son proposiciones:

- Ese es el mejor libro de todos
- ¿Puedes pasarme esa servilleta?
- Haz de comer

Proposición compuesta:

- Mi nombre es Mariana y viví en Hidalgo
- El martes iré al cine o de compras.
- Si ella sabe bailar entonces podrá enseñarle a sus amigos.

Negaciones:

- El apellido de Monica no es Geller
  - El apellido de Monica es Geller

- Esos zapatos son de color rosa
  - Esos zapatos no son de color rosa

Proposiciones

EJERCICIOS

DETERMINAR SI UNA PROPOSICIÓN ES COMPUESTA O SIMPLE

[Para poder resolver estos ejercicios hay que fijarnos si la oración contiene algun conector (y, o, si entonces), aunque también debemos revisar si la frase nos esta dando dos aservaciones diferentes entre si]

1. The Beatles eran una banda de rock y mi música favorita es la balada. [Compuesta]
2. Chandler Bing es un personaje de "Friends" [Simple]
3. El maquillaje esta compuesto por seda y acido úrico [Simple]
4. Si estudias entonces te convertirás en un buen alumno. [Compuesta]

CONSTRUYE LA NEGACIÓN DE CADA PROPOSICIÓN

[La negación de una proposición falsa se convierte en verdadera. La negación de una proposición verdadera se convierte en falsa]

- Mis audífonos son de color blanco
  - Mis audífonos no son de color blanco
- En esa fotografía no te ves bien.
  - En esa fotografía te ves bien.
- Alejandro tiene una cama cómoda
  - Alejandro no tiene una cama cómoda
- Ella no escribe sus apuntes completos
  - Ella escribe sus apuntes completos
- . $a > 5$
- $a \leq 5$

[Explicación: su negación seria "a no es mayor que 5", pero ya que no podemos usar la palabra "no" en este caso decimos "a es menor o igual a 5"]

SÍMBOLOS

Las proposiciones se representan con letras (p, q, r)

Los conectivos lógicos con símbolos.

PARA SIMPLIFICAR EL MANEJO DE LA LÓGICA SE USAN SÍMBOLOS

CONECTIVO	SÍMBOLO	TIPO DE PROPOSICIÓN
Y (pero, ni)	$\wedge$	Conjunción
O	$\vee$	Disyunción
NO	~	Negación

Ejercicios

Transcribe las proposiciones.

Si tenemos que la frase p es "Las clases de piano duraran 3 años" ¿Que seria ~p?

Las clases de piano no duraran 3 años

p "Mañana es el cumpleaños de Janice"

q "Quiero comprarle flores" ¿Que seria p ^ q?

Mañana es el cumpleaños de Janice y quiero comprarle flores

p "Ella hará su tarea"

q "Ella vera la televisión"¿Que seria q ˅ p?

Ella vera la televisión o ella hará su tarea

p "Hoy hace frío"

q "Hoy leeré un libro" ¿Qué sería ~(p ^ q) ?

Hoy no hace frío u hoy no leeré un libro

p "La niña es bonita"

q "La niña se llama Raquel"

¿Qué sería ~(p ˅ q) ?

Ni la niña es bonita ni la niña se llama Raquel

[En estos últimos dos casos, el hecho de que tenga un signo de negación antes de un paréntesis, hace que cambiemos los símbolos, al igual como lo hacemos en álgebra]

CUANTIFICADORES

INDICAN CUÁNTOS CASOS EXISTEN DE UNA SITUACIÓN DETERMINADA.

Universales → Todo, Cada uno, Todos, Ninguno

Existenciales → Hay, Al menos uno

Si una proposición es verdadera, su negación debe ser falsa y viceversa. En todos los casos posibles.

Proposición	Negación
Todos cumplen	Algunos no cumplen
Algunos cumplen	Ninguno cumple
Algunos no cumplen	No todos cumplen
Ninguno cumple	Todos cumplen

NEGACIÓN DE PROPOSICIONES CON CUANTIFICADORES

CUANTIFICADORES

Negación con cuantificadores
Ejemplo:

"Ningún gato de la cuadra está sucios"

[Primero analizamos todos los casos posibles]

Cuadra 1: G. sucio, g.sucio, g.sucio
Cuadra 2: G.sucio, g.limpio, g.limpio
Cuadra 3: G. limpio, g.limpio,g.limpio

[Para buscar su negación, las afirmaciones deben ser contrarias en todos los casos]

[Los casos pueden verse de manera mas clara en una tabla]

[Ponemos las posibles negaciones]

[Vemos si se cumplen o no en cada grupo, las afirmaciones]

Proposición	G1	G2	G3
1. Ningún gato de la cuadra esta sucio	F	F	V
2. Todos los gatos de la cuadra están sucios	V	F	F
3. Algunos gatos de la cuadra están sucios	V	V	F
4. Algunos gatos de la cuadra no están sucios	F	V	V

[La negación de la proposición (1) se trata de la afirmación 3 ya que en todos los casos son contrarias, la una de la otra]

EJERCICIOS

ESCRIBE LA NEGACIÓN

1. TODOS LOS ÁRBOLES FLORECEN
2. NINGÚN ÁRBOL FLORECE
3. ALGUNOS ARBOLES FLORECEN
4. ALGUNOS ARBOLES NO FLORECEN

Para la resolución de estas proposiciones nos basamos en la tabla de negación con cuantificadores.

Proposición	Negación
Todos cumplen	Algunos no cumplen
Algunos cumplen	Ninguno cumple
Algunos no cumplen	No todos cumplen
Ninguno cumple	Todos cumplen

Esta tabla facilita el razonamiento y hace el proceso más fácil, caso contrario si nos dedicamos a escribir todos los casos de casa proposición.

De igual manera es importante leer con detenimiento y descubrir que tratan de decirnos.

1. Todos los árboles florecen

Todos cumplen	Algunos no cumplen

Negación: Algunos árboles no florecen

2. Ningún árbol florece

Ninguno cumple	Todos cumplen

Negación: Todos los arboles florecen

3. Algunos árboles florecen.

Algunos cumplen	Ninguno cumple

Negación: Ningún árbol florece

4. Algunos árboles no florecen

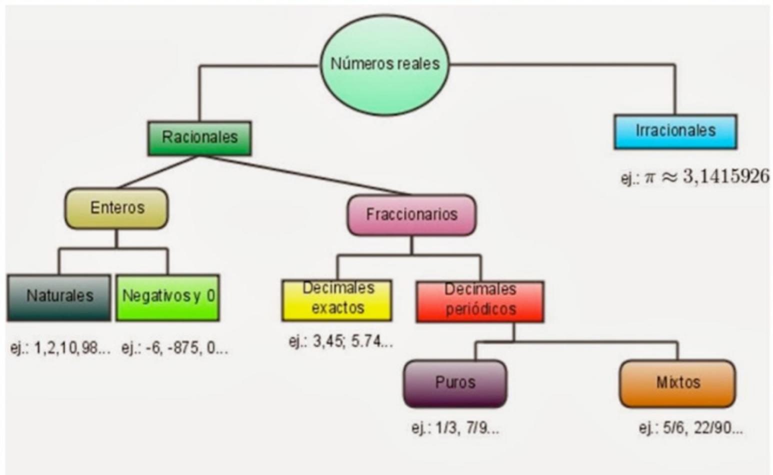
[Al menos uno florece]

Algunos no cumplen	No todos cumplen

Negación: Todos los árboles florecen

EJERCICIOS CUANTIFICADORES

Determina si la proposicón es verdadera o falsa en base a la imagen.



[Es importante pensar que es lo que nos están tratando de decir]

1. EXISTE UN NÚMERO RACIONAL QUE NO ES REAL

ESTA PROPOSICIÓN ES FALSA, PORQUE PARA SER UN NÚMERO RACIONAL PRIMERO DEBE SER UN NÚMERO REAL

2. TODO NÚMERO PURO ES UN NÚMERO DECIMAL PERIÓDICO

ESTA PROPOSICIÓN ES VERDADERA, YA QUE DENTRO DE LA FAMILIA DE LOS DECIMALES PERIÓDICOS SE ENCUENTRAN LOS NÚMERO PUROS

3. EXISTE UN NÚMERO ENTERO NO NATURAL Y NO NEGATIVO

ESTA PROPOSICIÓN ES VERDADERA, YA QUE EL NÚMERO CERO, NO ES NEGATIVO NI POSITIVO, SIN EMBARGO ES ENTERO.

4. TODO NÚMERO ENTERO ES UN NÚMERO NEGATIVO

ESTA PROPOSICIÓN ES FALSA, YA QUE EN ESA FAMILIA ENCONTRAMOS A LOS NÚMERO NATURALES

Proposiciones

Ejercicios

Nota: No es una proposición: Ordenes, preguntas, algo subjetivo, paradojas.

TRANSCRIBE CADA UNA DE LAS PROPOSICIONES COMPUESTAS EN SÍMBOLOS.

Siendo p "Él es muy alto" y q "Él se llama Juan"

1. ~q

Él no se llama Juan

2. ~p ˅ q

Él no es muy alto o se llama Juan

3. ~p ^ ~q

Él no es muy alto ni se llama Juan

4. p ^ q

Él es muy alto y se llama Juan

5. ~(p ˅ ~q)

El no es muy alto y se llama Juan

TRANSCRIBE CADA PROPOSICIÓN SIMBÓLICA EN PALABRAS.

Sea p "La niña llora" y q "Javier prepara la comida"

1. La niña no llora ni Javier prepara la comida

~(p ˅ q)

2. La niña llora o Javier no prepara la comida

p ˅ ~q

3. La niña llora y Javier prepara la comida

p^q

EXPLICA LA DIFERENCIA ENTRE LAS PROPOSICIONES

1. Todas las personas no leen filosofía
2. No todas las personas leen filosofía

La primera frase es de manera global, quiere decir que ninguna persona lee filosofía, mientras que en la segunda proposición nos da a entender que al menos una persona lee filosofía

En la primera nos dice que ninguno lee, en la segunda nos dice que algunos si leen.

¿ES UNA PREPOSICIÓN O NO?

1. Ve por un litro de leche a la tienda
NO, se trata de una orden

2. No me gusta el color rojo
SI, es una proposición

3. Cuando yo nací fue un viernes
SI, aunque no sabemos si es verdadero o falso

4. ¿Te gusta mi nueva libreta?
NO, las preguntas no son proposiciones

5. Mi computadora es el mejor de todos
NO, ya que es algo subjetivo

6. 10+3=13
SI, es una proposición

7. Mi novio mide 1.92 m
SI, es una proposición

ESCRIBE LA NEGACIÓN

1. Algunos alumnos reprueban español
Ningún alumno reprueba español

8. Toda el agua del mundo es fría
Alguna agua del mundo no es fría

9. Ningún empleado come en la cafetería
Todos los empleados comen en la cafetería

10. Ella se llama Tamara
Ella no se llama Tamara

11. Algunos árboles no dan frutos
Todos los árboles dan frutos

PROPOSICIÓN FALSA

"Se solicita ayudante general. Ambos sexos"
Lo que tratan de decirnos es que solicitan personas tanto del sexo masculino como del sexo femenino. La mala redacción no da a entender que buscan a alguien con ambos sexos, lo cual es lógicamente imposible.

DETERMINA SI SON COMPUESTAS

1. Mañana tengo clases SIMPLE
(Nos habla de un solo hecho, sin detalles)

2. Daniel quiere estudiar medicina y arquitectura COMPUESTA
(Ya que no es lo mismo estudiar medicina a arquitectura)

3. Aun no me decido si ir a la feria o al museo COMPUESTA
(Se tratan de lugares totalmente diferentes)

4. La biblioteca es un lugar silencioso SIMPLE
(Solo nos habla de una característica de un lugar)

Conjunciones

$\wedge$

TABLA DE VERDAD		
P	Q	P ^Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

"Yo quiero terminar de estudiar pero mi hermana quiere jugar"

Conjunciones

Unión de dos o más cosas.
Se representa con:

- ^
- Pero
- Y
- Ni

Para que una preposición de este tipo sea verdadera p y q deben ser verdaderas

EN ESTE TEMA SE ENCONTRARAN LOS VALORES DE VERDAD DE LAS PROPOSICIONES COMPUESTAS

Disyunciones

$\vee$

TABLA DE VERDAD		
P	Q	P ˅ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

"Leo un libro de terror o de aventura"

Disyunciones

Separación/desunión de una cosa

Se representa con:

- ˅
- o

El resultado sera verdadero siempre y cuando se cumpla una de ellas

Negación

~

TABLA DE VERDAD	
P	~P
V	F
F	V

"Mi nombre no es Carla"

Negación

Aquí simplemente se debe saber que cambiara al valor opuesto

A PARTIR DE ESTOS CONCEPTOS, NOSOTROS YA SOMOS APTOS PARA CONSTRUIR TABLA DE VERDAD DE PROPOSICIONES COMPUESTAS

EJERCICIO EXPLICATIVO TABLAS DE VERDAD

Suponga que p es falsa y q verdadera

Construye la tabla de verdad para (~p ^q) ˅ ~q

1. Primero colocamos todas las opciones para p y q

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

2. Desglosamos cada parte de la proposición para la tabla, empezando por ~p (negación de p)

p	q	~p
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	V

3. Seguimos con la otra parte de la proposición, la unión de ~p conjunción q

p	q	~p	~p ^ q
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

Necesitamos apoyarnos en la tabla de verdad de conjunción que no dice que para ser verdadero, ambas (p y q) deben ser verdaderas.

4. Colocamos la negación de q

p	q	~p	~p ^ q	~q
V	V	F	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

5. Para terminar creamos la columna de (~p^q) ˅ ~q, la cual es nuestra proposición completa

p	q	~p	~p ^ q	~q	(~p^q) ˅ ~q,
V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	V	V

Para ello nos basaremos en la tabla de verdad de disyunción "El resultado es verdadero cuando se cumple una sola de ellas"

6. En el caso que nos pidan encontrar el valor de la verdad de las proposiciones como es el caso de ahora "Cuando p es falsa y q verdadera" debemos localizarla

p	q	~p	~p ^ q	~q	(~p^q) ˅ ~q,
V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	V	V

El valor de la verdad en este caso corresponde a VERDADERO

PROPOSICIONES EQUIVALENTES

Una aplicación de las tablas de verdad consiste en mostrar que dos proposiciones son equivalentes. Por ejemplo:

$$\sim p \wedge \sim q \quad y \quad \sim(p \vee q)$$

A estas equivalencias les llamamos **Leyes de Morgan**

Leyes de Morgan

AL APLICAR LA LEY, SE NIEGA AMBOS COMPONENTES Y EL CONECTOR LÓGICO

Para cualesquiera proposiciones *p* y *q*,

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

y

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

Encontrar el equivalente de:

Yo cene ayer o no comí hoy.

Yo no cene ayer y comí hoy.

Mi madre lavara y mi padre irá a trabajar.

Mi madre no lavara o mi padre no irá a trabajar.

Ella no toca el piano o ella aprende francés

Ella toca el piano y ella no aprende francés.

Mi amigo no necesita ayuda y mi perro no quiere comer

Mi amigo necesita ayuda o mi perro quiere comer.

EJERCICIO

USANDO LAS LEYES DE MORGAN, ENCONTRAR EL EQUIVALENTE DE:

$q \wedge (q \vee \sim p)$

PRIMERO TENEMOS QUE NEGAR TODA LA PROPOSICIÓN

$\sim[q \wedge (q \vee \sim p)]$

APLICAMOS LA NEGACIÓN A LO QUE ESTA DENTRO DE LOS CORCHETES

$\sim q \vee \sim(q \vee \sim p)$

Y FINALMENTE LO APLICAMOS A LOS PARÉNTESIS

$\sim q \vee (\sim q \wedge p)$

ES IMPORTANTE CUIDAR DE CAMBIAR LOS SIGNOS

EJERCICIOS

TABLAS DE VERDAD

Encontrar el valor de la verdad cuando p es verdadera y q falsa en la proposición: ~p ^ q

p	q	~p	~p ^ q
V	F	F	F

FALSO

Encontrar el valor de la verdad cuando p es verdadera y q verdadera en la proposición: (q ∨ ~p) ∨ ~q

p	q	~p	~q	q∨~p	q∨~p ∨~q
V	V	F	F	V	V

VERDADERO

Encontrar el valor de la verdad cuando p es falsa y q verdadera en la proposición: ~p∨ (~q ^ ~p)

p	q	~p	~q	~q^~p	~p∨ ~q^~p
F	V	V	F	F	V

VERDADERO

Encontrar el valor de la verdad cuando p es falsa y q falsa en la proposición: (p ∨ ~q) ^ (p^q)

p	q	~q	(p∨~q)	(p ^ q)	(p∨~q) ^ (p ^ q)
F	F	V	V	F	F

FALSO

EJERCICIOS

TABLAS DE VERDAD

Encontrar el valor de la verdad cuando p es falsa y q verdadera en la proposición: ~p ˅ (q^~p)

p	q	~p	(q^~p)	~p ˅ (q^~p)
F	V	V	V	V

VERDADERO

Encontrar el valor de la verdad cuando p es falsa y q falsa en la proposición: ~p ^ (q ˅p)

p	q	~p	(q ˅p)	~p ^ (q ˅p)
F	F	V	F	F

FALSO

Utiliza la ley de Morgan para escribir la negación de las proposiciones:

Es verano y no hay nieve
No es verano o hay nieve

La película es mala o el libro es bueno
La película no es mala y el libro no es bueno

Aplicar la Ley de Morgan a:

- (p ˅ ~q) ^ (p^q)
  ~[(p ˅ ~q) ^ (p^q)]
  (~p^q) ˅ (~p ˅~q)

II. Solución de los ejercicios

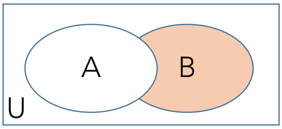
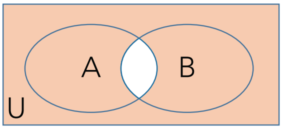
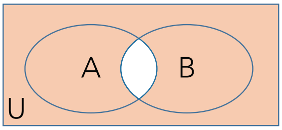
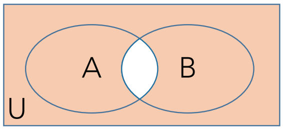
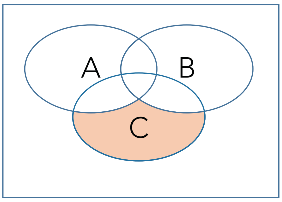
Primer capítulo

1.	3072	***2.***	1	***3.***	63	***4.***	11/12	***5.***	36
6.	216	***7.***	15400	***8.***	22650	***9.***	5100	***10.***	3366
11.	d	***12.***	b	***13.***	d	***14.***	a	***15.***	d
16.	c	***17.***	d	***18.***	d	***19.***	b	***20.***	b
21.	c	***22.***	c	***23.***	b	***24.***	3	***25.***	2
26.	0.5	***27.***	50	***28.***	20 y 10	***29.***	7	***30.***	7
31.	24, 8 y 4	***32.***	22	***33.***	13	***34.***	18	***35.***	15

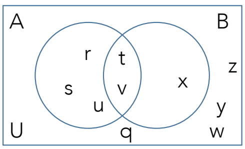
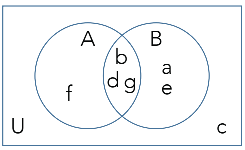
Segundo capítulo

1)	***2)***	***3)***	***4)***	***5)***
a) {8,9,10,11,12,13}	a) 8	a) $\not\subseteq$	a) {6,9}	a) {1,3}
b){enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre, diciembre}	b) 7	b) $\subseteq$	b){1,2,3,4,5,10}	b) {1,2,3,4,5,6}
c) {rojo, naranja, amarillo, verde, azul, índigo, violeta}	c) 50	c) $\not\subseteq$	c) {2,4}	c) {1,2,3,4,5,6,7}
d) {1,3}	d) 3001	d) $\subseteq$	d) {3,5,10}	d) {2,4,6}
e) {Canadá, Estados Unidos, México}	e) 27	e) $\subseteq$	e) {1}	e) {4,6}
	f) 41	f) $\subseteq$	f) {6,9}	f) {1,2,3,5,7}
	g) 16	g) $\subseteq$	g) {1,2,4,5,10}	g) {1,3,5,7}
		h) $\subseteq$		h) {1}
				i) {5,7}
				j) {4,6}
				k) {5,7}

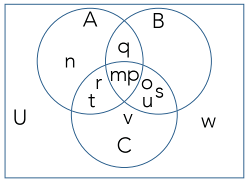
6)

a)	A B U
b)	A B U
c)	A B U
d)	A B U
e)	A B C

7)

a)	A B r t z s v x u y U q w
b)	A B b a d g e f U c

c)



Tercer capítulo

1. Carmen NO tiene un coche rojo.
2. a. El Estado de Puebla NO tiene un gobernador.
   b. El Sol es una estrella.
3. Enrique Peña Nieto NO será presidente hasta el año 2016.
4. a. Hoy estamos a 18°C u hoy es martes.
   b. Hoy estamos a 18°C y hoy es martes.
   c. Hoy no estamos a 18°C y hoy no es martes.
   d. Hoy no estamos a 18°C u hoy no es martes.
5. a. Sí.
   b. Sí.
   c. No.
   d. Sí.
   e. Sí.
6. a. Todos los gatos tienen pulgas.
   b. Ningún gato tiene pulgas.
   c. Algunos gatos tienen pulgas.
7. En la primera proposición "Todos los alumnos no aprobaron el examen" se está negando todos, por lo que significa que NINGUNO de los alumnos aprobó el examen. En la segunda proposición "No todos los alumnos aprobaron el examen" significa que ALGUNOS sí aprobaron el examen.
8. a. Sí.
   b. No.
   c. Sí.
   d. No.
9. No es necesario crear toda la tabla de verdad, debido a que ya nos están dando el valor inicial de p que es falso. Así, $\neg p$ es su contrario: verdadero.
10. La proposición puede desarrollarse como 8 es mayor que (>) 5 u 8 es igual (=) a 5. Es decir que $8 \geq 5 = 8 > 5$ u $8 = 5$. Es una disyunción.

11.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(q \vee \neg p)$	$(q \vee \neg p) \vee \neg q$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

12.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg p \wedge q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F

13.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$q \vee p$	$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \vee p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F

14.

p	q	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg q \rightarrow p$	$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F

15. Es necesario, primero, expresarlo como una condicional: Si es perro, entonces tiene pulgas. Aplicando la negación, queda: es un perro y no tiene pulgas.
16. a. Falso.
    b. Verdadero.
    c. Verdadero.

17. Algunos ejemplos:

    - Árbol que nace torcido, jamás su tronco endereza.
        - Si el árbol nace torcido, entonces jamás su tronco enderezará.

    - Agua que no has de beber, déjala correr.
        - Si no vas a beber esa agua, entonces déjala correr.

    - Botellita de jerez, todo lo que me digas será al revés.
        - Si eres botellita de jerez, entonces todo lo que me digas será al revés.

    - Cuesta más caro el caldo que las albóndigas.
        - Si es caldo, entonces cuesta más caro que las albóndigas.

    - El que con lobos anda, a aullar se enseña.
        - Si anda con lobos, entonces a aullar se enseña.

    - El que es perico, donde quiera es verde.
        - Si es perico, entonces donde quiera es verde.

    - El que nace pa'tamal, del cielo le caen las hojas.
        - Si nace pa'tamal, entonces del cielo le caen las hojas.

    - Dime de qué presumes y te diré de qué careces.
        - Si me dices de qué presumes, entonces te diré de qué careces.

    - Crea fama y échate a dormir.
        - Si creas fama, entonces échate a dormir.

18. No válido.

III. Glosario

Abstracción: capacidad que permite comprender la relación entre un concepto y un objeto en un campo de conocimiento determinado.

Abstracto: propiedad específica de un objeto, dejando de lado el resto de las propiedades.

Conjetura: al observar que un método de trabajo funciona constantemente para cierto tipo de problemas se puede concluir que el mismo método de trabajo funcionará para resolver problemas similares.

Conjunción: la unión de una o más cosas y se representa con el símbolo ∧.

Conjunto: colección de elementos considerada en sí misma como un objeto.

Cuantificador existencial: hay, al menos uno, etcétera.

Cuantificador universal: todo, cada uno, todos y ninguno.

Cuantificador: permite indicar la cantidad de una cosa. Los cuantificadores son utilizados para indicar cuántos casos existen de una situación determinada.

Diagrama de Venn: forma gráfica para la representación de conjuntos.

Disyunción: es la desunión o separación de una o más cosas. Implica la idea de cualquiera. Se representa al unir dos proposiciones con una letra o. Utilizando un símbolo se usa ∨.

Inferencia lógica: evaluación a partir de la cual se obtienen conclusiones válidas a partir de premisas básicas.

Lógica: rama fundamental de las matemáticas que establece el valor de verdad de las proposiciones y permite construir el razonamiento matemático. Disciplina filosófica que estudia la estructura o formas de pensamiento con el fin de establecer razonamientos o argumentos válidos o correctamente lógicos. La lógica es base fundamental de las matemáticas, a partir de la cual se establecen principios fundamentales para distinguir el razonamiento correcto del incorrecto.

Método de Gauss: es la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética, en concreto, con la suma de los n primeros números naturales.

Pensamiento analítico: capacidad para identificar variables que intervienen en la situación problema, por lo que se incorpora un razonamiento lógico inductivo o deductivo que muestra, participa e interrelaciona el todo y las partes de un objeto estudiado.

Pensamiento crítico: capacidad que permite, a partir de un hecho, discernir, debatir, evaluar los hechos, buscar contradicciones, entre otras.

Pensamiento matemático: es la capacidad de usar las matemáticas para resolver distintas situaciones cotidianas que involucran el dominio de un campo de conocimientos específico como el de las habilidades de abstracción, validación empírica e inferencia lógica.

Premisa: puede ser una ley o una regla para llegar a una conclusión.

Proposición compuesta: formada por dos proposiciones que están unidas mediante conectores lógicos como "y" u "o".

Proposición condicional: es una proposición formada por el conectivo si … entonces. Se representa como: p → q.

Proposición: aseveración que emite un juicio o valor de las cosas y que puede ser falsa o verdadera, pero no ambas.

Razonamiento abstracto: capacidad de observación y organización lógica, de manera que se extraigan conclusiones a partir de unos datos concretos. Representa la capacidad y agilidad actual del sujeto para establecer lazos entre diversos elementos y descubrir las relaciones existentes en el seno de conjuntos complejos.

Razonamiento deductivo: se caracteriza por la aplicación de principios generales a ejemplos específicos. El razonamiento deductivo es la base de las demostraciones matemáticas. Este tipo de razonamiento intenta demostrar una propiedad mediante la deducción de las otras anteriormente ya demostradas, este tipo de razonamiento garantiza la verdad de la conclusión, si la información de la que se parte es verdadera.

Razonamiento inductivo: razonamiento que se obtiene al obtener una suposición fundamentada en observaciones repetidas en un patrón o proceso particular. Se caracteriza por permitir llegar a una conclusión general (mediante una conjetura), a partir de observaciones repetidas de ejemplos específicos. La conjetura puede ser verdadera o falsa.

Razonamiento: capacidad de observación que tenemos todos los seres humanos para establecer relaciones, simples o complejas, que permitan llegar a la comprensión de un problema y, por consecuencia, a realizar una propuesta que solucione dicho problema. Proceso que permite estructurar y organizar pensamientos para desarrollar una conclusión.

Recursivo: capacidad de regresar en el proceso.

Tautología: fórmula bien formada de un sistema de lógica proposicional que resulta verdadera para cualquier interpretación; es decir, para cualquier asignación de valores de verdad que se haga a sus fórmulas atómicas.

Validación empírica: validación con la cual se puede comparar el modelo de representación con la realidad.

IV. Índice alfabético

Fuentes

Farfán Márquez, Rosa María, *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente,* Barcelona, Gedisa, 2012 (Biblioteca de educación. Didáctica general, 15).

Fingermann, Gregorio, *Lógica y teoría del conocimiento,* México, El Ateneo, 1977.

Fresán Orozco, M., y M. Outón Lemus, *Reflexiones sobre el modelo educativo de la UAM Cuajimalpa,* México, UAM Cuajimalpa, 2006.

"George Pólya", en <https://es.wikipedia.org/wiki/George_P%C3%B3lya>.

Ivorra Castillo, Carlos, *Lógica y teoría de conjuntos,* Valencia, Universitat de València, 2016a, en < https://www.uv.es/ivorra/Libros/Logica.pdf>.

Ivorra Castillo, Carlos, *Teorías de conjuntos,* Valencia, Universitat de València, 2016b, en <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Conjuntos2.pdf>.

Kendall Hunt, High School Math Online, "Lecciones condensadas para capítulo 2: Lección condensada 2.1. Razonamiento inductivo; Lección condensada 2.2. Razonamiento deductivo; Lección condensada 2.3. Encontrar el enésimo término", Dubuque, Iowa, Kendall Hunt, 2011, en <http://math.kendallhunt.com/documents/dg3/CondensedLessonPlansSpanish/DG_CLPS_02.pdf>.

Miller, Charles D., Vern E. Heeren y John Hornsby, *Matemática: razonamiento y aplicaciones,* 10a ed. Trad. de Víctor Hugo Ibarra Mercado, México, Pearson/Addison Wesley, 2006.

Muñoz Gutiérrez, Carlos, *Introducción a la lógica,* Madrid, Universidad Complutense de Madrid, 2006, en <http://pendientedemigracion.ucm.es/info/pslogica/cdn.pdf>.

"Razonamiento abstracto. Ejercicios resueltos", El Blog del Profe Alex, en <http://profe-alexz.blogspot.mx/2013/04/razonamiento-abstracto-ejercicios.html>.

"Razonamiento abstracto: EXAMEN SENESCYT SNNA ENES - Forma 1", en <http://examendeingresoalau.blogspot.mx/2013/09/razonamiento-abstracto-examen-del.html>.

"Resolución de problemas", en <https://es.wikipedia.org/wiki/Resoluci%C3%B3n_de_problemas>.

"Tautología", en <https://es.wikipedia.org/wiki/Tautolog%C3%ADa>.

Universidad Abierta y a Distancia de México (UADM), "Eje 2. Razonamiento lógico matemático", en <http://tinyurl.com/zplkx8y>, México, UADM, 2016.

Pensar en matemáticas, se terminó de imprimir en la Ciudad de México en Octubre de 2016, en los talleres de la Imprenta 1200+ ubicada en Andorra 29, Colonia del Carmen Zacahuitzco. La producción editorial estuvo a cargo de Servicios Editoriales y Tecnología Educativa Prometheus S.A. de C.V. En su composición se usaron tipos Minion Pro y Avenir. Se tiraron 100 ejemplares sobre papel bond de 90 kilogramos. La corrección de estilo estuvo a cargo de Hugo A. Espinoza Rubio y el diseño editorial y la portada fueron realizadas por Ricardo López Gómez.